Analyse fonctionnelle

Max Fathi[1]

May 19, 2025

[1]LJLL & LPSM, Université Paris Cité, France
Je remercie Mathis Lefebvre pour avoir signalé une erreur dans une version précédente de ce poly

Contents

1 Introduction **3**
- 1.1 Espaces vectoriels topologiques . . . 3
- 1.2 Rappels de topologie . . . 6
  - 1.2.1 Rappels généraux . . . 6
  - 1.2.2 Théorème de Baire pour les espaces complets . . . 6

2 Espaces de Fréchet **7**
- 2.1 Définitions et premières propriétés . . . 7
- 2.2 Théorème de Banach-Steinhaus et applications . . . 10
- 2.3 Théorèmes de Hahn-Banach . . . 12
  - 2.3.1 Forme analytique . . . 12
  - 2.3.2 Forme géométrique . . . 14
- 2.4 Dualité et topologie faible . . . 15

3 Espaces de Banach **18**
- 3.1 Topologies faibles sur les espaces de Banach . . . 18
  - 3.1.1 Topologie faible . . . 18
  - 3.1.2 Topologie faible-$*$ . . . 20
- 3.2 Espaces réflexifs . . . 21
- 3.3 Espaces uniformément convexes . . . 24
  - 3.3.1 Propriétés principales . . . 24
  - 3.3.2 Complément : super-reflexivité et plongements isométriques . 26
- 3.4 Le cas des espaces L^p . . . 29
  - 3.4.1 Dualité pour les espaces L^p . . . 29
  - 3.4.2 Compléments sur la compacité dans les espaces L^p . . . 36

4 Espaces de mesures **40**
- 4.1 Quelques rappels sur la convergence de mesures . . . 40
- 4.2 Théorème de Riesz . . . 42
  - 4.2.1 Théorème de Riesz, cas compact . . . 43
  - 4.2.2 Théorème de Riesz, cas localement compact . . . 48
- 4.3 Théorème de Prokhorov . . . 49
- 4.4 Concentration-compacité . . . 51
- 4.5 Introduction au transport optimal . . . 52

5 Introduction aux distributions **54**
- 5.1 Intégration par parties . . . 54
- 5.2 Topologie limite inductive et espace $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . 57

5.2.1 Généralités sur la topologie limite inductive pour des suites d'espace de Fréchet . . . 58
5.2.2 Le cas des espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . 61
5.3 Espaces de distributions . . . 61
5.3.1 Exemples . . . 62
5.3.2 Distributions à support compact . . . 62
5.4 Opérations sur les distributions . . . 64
5.4.1 Dérivation . . . 64
5.4.2 Convolution . . . 65
5.4.3 Preuve de la Proposition 5.4.7 . . . 66
5.4.4 Distributions tempérées . . . 66
5.5 Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels . . . 66

6 Transformation de Fourier **68**
6.1 Transformation de Fourier sur L^1 . . . 68
6.2 Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz et les distributions tempérées . . . 71
6.3 Transformation de Fourier dans L^2 . . . 73
6.4 Formule sommatoire de Poisson . . . 74

7 Espaces de Sobolev **77**
7.1 Espaces de Sobolev en dimension 1 . . . 77
7.2 Espaces de Sobolev en dimension supérieure . . . 83
7.3 Inégalités de Sobolev . . . 85
7.4 Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et traces de fonctions $W^{1,p}$ . . . 88
7.5 Calcul des variations et EDP . . . 89
7.5.1 EDP linéaires . . . 89
7.5.2 Exemples d'EDP non-linéaires . . . 91

8 Analyse spectrale **94**
8.1 Adjoint d'un opérateur . . . 94
8.2 Opérateurs compacts . . . 95
8.3 Alternative de Fredholm . . . 98
8.4 Spectre d'un opérateur . . . 100

Chapter 1

Introduction

Ces notes de cours sont largement inspirées de celles de G. Carlier et de I. Gallagher, ainsi que des ouvrages [3, 9].

1.1 Espaces vectoriels topologiques

Les espaces de fonctions sont souvent des (parties convexes d') espaces vectoriels topologiques. On peut penser à l'ensemble de toutes les fonctions entre deux espaces vectoriels donnés, mais aussi

- Les espaces de fonctions régulières (continues, C^k, C^∞...)
- Les espaces de fonctions vérifiant des conditions d'intégrabilité L^p.
- Les espaces de fonctions ayant un comportement donné sur le bord du domaine (nulles, convergeant vers 0...)

Ces espaces peuvent être munis de différentes topologies (convergence simple, convergence uniforme, convergence L^p...). Dans certains cas, ces topologies sont définies par des normes. Mais comme ces espaces sont de dimension infini, les différentes normes ne sont pas équivalentes.

Les buts de ce cours sont

- D'étudier la topologie de certains espaces vectoriels topologiques, dans une généralité suffisante pour englober de nombreux espaces de fonctions, et de voir de nouveaux outils dans des contextes connus (espaces de Banach, espaces de Hilbert...).
- De comprendre la dualité sur ces espaces, et ses conséquences et applications.
- De présenter certains nouveaux espaces de fonctions, utiles dans différentes branches des mathématiques (EDP notamment).
- D'étendre certaines théories connues (transformée de Fourier, opérateurs linéaires symétriques) à de nouveaux espaces de fonctions.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel topologique). *Un espace vectoriel topologique (sur $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une topologie pour laquelle les applications*

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y; \quad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longrightarrow \lambda x$$

sont continues.

Remarque 1.1.1. *Dans un EVT, comme les translations sont des homeomorphismes, si $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinages de* 0*, alors* $\{x+V, V \in \mathcal{V}\}$ *est un système fondamental de voisinages de* x*.*

Définition 1.1.2. *Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel topologique est dit convexe si* $\forall x, y \in C$ *et* $t \in [0,1]$ *on a* $tx + (1-t)y \in C$*.*

Remarque 1.1.2. *Si C est fermé, il suffit de vérifer cette propriété pour* $t = 1/2$*.*

Définition 1.1.3. *Un espace vectoriel topologique localement convexe est un EVT dont chaque point possède une base de voisinages convexes.*

Un espace vectoriel topologique localement convexe séparé est un EVTLC dont la topologie est séparée.

Remarque 1.1.3. *Comme conséquence de la remarque 1.1.1, on peut remplacer "'chaque point"' par "'un point"' dans cette définition.*

On peut supposer sans perdre de généralité que $\{0\}$ *possède un système fondamental de voisinages convexes et symétriques (i.e. tels que* $-C = C$*). Comme l'intérieur d'un convexe est un convexe, on peut aussi sans perdre de généralité supposer les voisinages ouverts dans cette définition.*

Remarque 1.1.4. *Un espace vectoriel topologique peut ne pas être localement convexe. Il sera vu en TD que si* $0 < p < 1$*, l'espace* $L^p([0,1],\mathbb{R})$ *des foncitons telles que* $|f|^p$ *soit intégrables, muni de la distance* $d(f,g) = \int |f-g|^p dt$*, est un espace vectoriel topologique qui n'est pas localement convexe.*

Définition 1.1.4. *Une partie A d'un EVTLC est dite bornée si pour tout voisinage ouvert V de l'origine, il existe* $C > 0$ *tel que* $A \subset C \cdot V$*.*

Si l'espace vectoriel est normé, en prenant $B(0,1)$ comme voisinage, si A est borné alors $A \subset B(0,C)$ pour un $C > 0$, ce qui coincide avec la définition usuelle.

Exemple 1.1.1.

- *La boule unité de* $\mathbb{R}^n$ *est un convexe (quelque soit la norme).*
- *L'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *prenant la valeur nulle en zéro est convexe.*
- $\{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}); \limsup_{\pm\infty} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| = 0 \ \forall k, \ell \in \mathbb{N}\}$ *est un convexe (qui jouera un rôle important lorsqu'on verra les distributions).*

La topologie induite par une norme sur un EVT donne automatiquement un EVTLCS. En dimension infinie, il est souvent utile de considérer des topologies qui ne sont pas induites par une norme. Mais les espaces considérés par les analystes ont souvent plus de structure qu'un EVTLCS général.

Définition 1.1.5 (Jauge d'un convexe)**.** *Soit C un convexe de* $\mathbb{R}^d$*, tel que* $0 \in \mathrm{Int}(C)$*. Sa jauge est définie par*

$$||x||_C := \inf\{t > 0; x \in tC\}.$$

Proposition 1.1.6. *La jauge de C vérifie*

1. $\forall \lambda > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$, $||\lambda x||_C = \lambda ||x||_C$ *et* $||x+y||_C \leqslant ||x||_C + ||y||_C$*;*
2. *Si C est ouvert, alors* $C = \{x \in E; ||x||_C < 1\}$*;*

3. *La jauge est une application continue.*

4. *Si C est un ouvert symétrique borné, la jauge définit une norme.*

Les trois premières parties sont encore vraies sur un espace vectoriel topologique (les preuves ci-dessous le montreront). La quatrième pose problème (il faut déjà connaitre la topologie pour définir les ouverts bornés), mais on verra plus tard son analogue.

Proof.
1. L'homogénéité positive est vraie par définition. Pour l'inégalité triangulaire, soit s, t tels que $s^{-1}x$ et $t^{-1}y$ appartiennent à C. Alors par convexité
$$\frac{s}{s+t}s^{-1}x + \frac{t}{s+t}t^{-1}y \in C$$
et donc $(s+t)^{-1}(x+y) \in C$. On en déduit que $||x+y||_C \leqslant s+t$, et on conclut en prenant l'infimum sur s et t.

2. Si $x \in C$, comme C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$, et donc $||x||_C \leqslant (1+\varepsilon)^{-1} < 1$.

   Réciproquement, si $||x||_C < 1$, il existe $t > 1$ tel que $tx \in C$. Comme $0 \in C$, on peut écrire x comme une combinaison convexe de deux éléments de C, et donc $x \in C$ par convexité.

3. Comme on a déjà l'inégalité triangulaire, $|||x||_C - ||y||_C| \leqslant ||x-y||_C$, donc il suffit de montrer la continuité en 0. Soit $\varepsilon > 0$, et V un voisinage de 0 inclus dans C. Alors εC est encore un voisinage de 0 inclus dans C, et pour tout $y \in \varepsilon V$, on a $\varepsilon^{-1}y \in V \subset C$, donc $||y||_C \leqslant \varepsilon$. Donc la jauge est bien continue en 0.

4. On a déjà l'inégalité triangulaire, et l'homogénéité est une conséquence directe de (i) et de la symétrie. Il nous reste à montrer la séparation. Comme C est borné, pour tout $x \neq 0$, il existe $M > 0$ tel que $\lambda x \notin C\ \forall \lambda \geqslant M$, et donc $||x||_C \geqslant M^{-1}$.

□

Définition 1.1.7 (Convexe dual)**.** *Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ dont l'intérieur contient l'origine. Son dual est défini par*
$$C^\circ := \{y \in \mathbb{R}^d ; \langle x, y\rangle \leqslant 1 \forall x \in C\}.$$

Etant donné une norme $||\cdot||$, sa norme duale $||\cdot||_*$ est la norme associé au dual de la boule unité pour $||\cdot||$.

Si à un vecteur x on associe la forme linéaire $f_x : y \longrightarrow \langle x, y\rangle$, la norme duale $||x||_*$ est la norme de la forme linéaire par rapport à $||\cdot||$, c'est à dire
$$||x||_* = \sup_y \frac{f_x(y)}{||y||}.$$

Exercice 1.1.1. *Soit $p \geqslant 1$. Quelle est la norme duale de $||x||_p := (\sum |x_i|^p)^{1/p}$? Indication : penser à l'inégalité de Hölder.*

Comme on a équivalence des normes, en dimension finie le dual d'un espace vectoriel a la même topologie que l'espace lui même, et donc il n'y a pas grand chose a dire du point de vue qualitatif[1]. On verra que par contre, sur un espace vectoriel normé en dimension infinie, il existe plusieurs topologies naturelles sur le dual, et qu'elles ne coincident pas en général.

1.2 Rappels de topologie

1.2.1 Rappels généraux

Définition 1.2.1. *Une topologie est séparée si pour toute paire de points distincts on peu trouver deux voisinages disjoints qui chacun contiennent un des deux points.*

1.2.2 Théorème de Baire pour les espaces complets

Théorème 1.2.2. *Soit E un espace métrique complet. Alors il est de Baire : tout intersection dénombrable d'ouverts denses est aussi dense.*

De manière équivalente, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est elle-même d'intérieur vide.

[1]En revanche, l'étude quantitative des liens entre un espace de dimension grande mais finie et son dual est un domaine d'étude actif à ce jour.

Chapter 2

Espaces de Fréchet

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1 (Semi-norme)**.** *Une semi-norme sur un espace vectoriel topologie est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui est sous-additive et positivement homogème, c'est à dire*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y); \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes est séparante si

$$p(x) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \implies x = 0.$$

La topologie associée à une famille de semi-normes est la topologie dont les ouverts sont les parties O de E telles que pour tout $x \in O$, il existe une famille finie *et non-vide $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que*

$$\{y \in E; p(x-y) < r \quad \forall p \in \mathcal{B}\} \subset O.$$

Une famille de semi-normes sur un espace vectoriel en fait donc un EVTLC.

Exemple 2.1.1.

- *Une norme est une semi-norme séparante.*
- *Si $E = C_b(\mathbb{R})$, alors les applications $p_x(f) := |f(x)|$ forment une famille séparante de semi-normes, qui induit la topologie de la convergence simple.*
- *La jauge d'un ouvert convexe symétrique définit une semi-norme.*

Proposition 2.1.2. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers x pour la topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P}$ ssi $p(x_n - x) \longrightarrow 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$.*

Théorème 2.1.3. *Soit E un EVTLC. Alors il existe une famille de semi-normes qui induit la topologie de E. De plus, cette topologie est séparée ssi la famille est séparante.*

Proof. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts convexes symétriques (qui donc en particulier contiennent 0). C'ets un système fondamental de voisinages de l'origine (et donc $x + \mathcal{C}$ est un système fondamental de voisinages de x). On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des jauges associées aux éléments de $\mathcal{C}$ (et on notera j_C la jauge associée au convexe C). C'est une famille de semi-normes, et on va montrer qu'elle induit la topologie de E.

Soit U un ouvert pour la topologie d'EVTLC et $x \in U$. Il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $x + C$ est un voisinage de x inclus dans U. Alors $B_{j_C}(x, 1) \subset x + C \subset U$ et donc U est un ouvert pour la topologie induite par la famille $\mathcal{P}$.

Réciproquement, si U est un ouvert pour la topologie induite par les semi-normes et $x \in U$, il existe $C_1, ..., C_k \in C$ tels que $\cap B_{j_{C_k}}(x, r) \subset U$. Alors $C = r \cap C_k$ est un ouvert convexe pour la topologie d'EVTLC, et $x + C \subset U$, donc U est un ouvert pour la topologie d'EVTLC.

Si la famille de semi-normes est séparante, alors étant donné $x, y \in E$ on peut trouver une semi-norme p telle que $p(x - y) = t > 0$. Alors les ensembles $\{z; p(x - z) < t/2\}$ et $\{z; p(y - z) < t/2\}$ séparent x et y.

Réciproquement, supposons la topologie séparée. Soient x_1 et x_2 deux poins distincts, et V_1 et V_2 deux voisinages qui les séparent. Il existe $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{P}$ et r_1, r_2 tels que

$$\{z; \sup_{p \in \mathcal{B}_i} p(x_i - z) < r_i\} \subset V_i.$$

En particulier, comme $x_2 \notin V_1$, pour au moins l'un des $p \in \mathcal{B}_1$ on a $p(x_1 - x_2) > r_1$, et donc la famille est séparante.

□

Définition 2.1.4 (Topologie faible). *Soit E un espace vectoriel topologique et E^* l'ensemble des formes linéaires continues. La topologie faible, notée $\sigma(E, E^*)$ est la topologie sur E définie par la famille de semi-normes $p_A(x) = \sup_{f \in A} |f(x)|$ où les A sont les parties finies de E^*.*

Proposition 2.1.5. *La topologie faible est la topologie la moins fine rendant continue les éléments de E^*.*

Proof. Le fait que la topologie faible rende continus les éléments de E^* est immédiat. Pour la reciproque, soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts d'une topologie rendant continus tous les éléments de E^*, et soit A une partie finie de E^*. Soit $f \in A$. Comme f est continue pour la topologie $\mathcal{T}$, pour tout $x \in E$ et $r > 0$, l'ensemble $\{y; |f(x-y)| < r\}$ appartient à $\mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est stable par intersections finies, la conclusion suit. □

Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, la topologie faible et la topologie forte coincident, mais ce n'est jamais le cas pour un espace de Banach dimension infinie.

Nous regarderons plus tard cette topologie plus en détails, notamment lorsque la topologie initiale est celle d'un espace de Banach.

Proposition 2.1.6. *Une partie A d'un EVTLC muni d'une famille séparante de semi-normes $(p_\alpha)_\alpha$ est bornée si et seulement si pour tout α il existe $C_\alpha > 0$ telle que*

$$p_\alpha(x) < C_\alpha \quad \forall x \in A.$$

Proof. Supposons A borné. Comme $V_\alpha = \{x; p_\alpha(x) < 1\}$ est un voisinage ouvert de l'origine, il existe C_α telle que $A \subset C \cdot V_\alpha$, et par homogénéité de p_α on a $p_\alpha(x) < C_\alpha$ pour tout $x \in A$.

Réciproquement, supposons que pour tout α il existe C_α telle que $p_\alpha(x) < C_\alpha \;\; \forall x \in A$. Alors étant donné un voisinage V de l'origine, comme il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ tels que

$$\cap_{j=1}^n \{x \in E; p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon_j\} \subset V$$

on a $A \subset C \cdot V$ avec $C = 2\max_j C_{alpha_j}/\varepsilon_j$. $\square$

Une question naturelle est d'étudier les EVTLC qui ont de meilleures propriétés topologiques, et notamment d'être métrique complet.

Définition 2.1.7 (Espace de Fréchet)**.** *Un espace est dit pré-Fréchet s'il est muni d'une famille de semi-normes qui est* dénombrable *et séparante, notée p_j, et telles que*

$$p_j \leqslant p_{j+1} \forall j$$

. La topologie associée est alors métrisable par la distance

$$d(x,y) := \sum 2^{-j} \min(p_j(x-y), 1).$$

Un espace est dit de Fréchet s'il est pré-Fréchet et complet.

Exemple 2.1.2.

- *Les espaces de Banach sont des espaces de Fréchet.*
- *Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, l'espace $C^\infty(K)$ est de Fréchet, muni des semi-normes*

$$p_j(x) := \sup_{|\alpha| \leqslant j} \sup_{x \in K} |\partial_\alpha f(x)|.$$

- *L'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est de Fréchet, muni des semi-normes $||f||_{L^p(\bar{B}(0,n))}$.*
- *Un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.*
- *Un produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.*

Exercice 2.1.1. *L'espace $\mathbb{R}^\infty$ de toutes le suites réelles muni des semi-normes $p_n(x) = |x_n|$ est un espace de Fréchet (et sa topologie est la topologie produit), mais n'est pas normable (et en particulier n'est pas un espace de Banach).*

Solution 2.1.1. *Le caractère Fréchet est immédiat. Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de norme sur cet espace. Supposons qu'il en existe une. Comme les applications $x \longrightarrow x_n$ sont continues, on peut poser c_n leur norme. Alors*

$$T_N : x \longrightarrow \sum_{1 \leqslant n \geqslant N} 2^{-n} c_n^{-1} x_n$$

vérifie $||T_N|| < 1$ pour tout N. En particulier, pour tout x on a

$$\sup_N \left| \sum_{1 \leqslant n \geqslant N} 2^{-n} c_n^{-1} x_n \right| < ||x||,$$

ce qui est absurde, car on peut aisément construire une suite telle que ce sup est infini.

Remarque 2.1.1. *La croissance des semi-normes n'est pas vraiment nécessaire, car on peut toujours remplacer p_k par $\sum_{j \leqslant k} p_j$. Cette hypothèse est néanmoins pratique car elle permet d'écrire la distance plus lisiblement, et car les ouverts de la topologie associée sont alors les ensembles O tels que*

$$\forall x \in 0, \ \exists \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} \ t.q. \ \{y; p_k(y-x) < \varepsilon\} \subset O.$$

Proposition 2.1.8. *Soient E et F deux espaces pré-Fréchet, avec (p_n) et (q_n) les familles respectives de semi-normes, et T une application linéaire de E vers F. Alors T est continue ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que*

$$q_n(Tx) \leqslant Cp_j(Tx) \quad \forall x \in E.$$

Proof. Supposons que T soit continue. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un voisinage U de l'origine tel que

$$q_n(Tx) < 1 \forall x \in U.$$

Il existe également $j \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tels que $\{p_j < \varepsilon\} \subset U$. Soit $x \in E$.

Si $p_j(x) = 0$ alors $p_j(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$et donc $\lambda x \in U$, d'où $q_n(\lambda Tx) < 1$ pour tout λ. On en déduit alors que $q(Tx) = 0$ aussi.

Si $p_j(x) > 0$ alors $\varepsilon x/(2p_j(x)) \in U$ et donc

$$q_n(Tx) = \frac{2p_j(x)}{\varepsilon} q_n\left(T(\varepsilon x/(2p_j(x)))\right) \leqslant \frac{2}{\varepsilon} p_j(x).$$

Réciproquement, supposons que pour tout n il existe j et C tels que $q_n(Tx) \leqslant Cp_j(Tx) \quad \forall x \in E$. Soit $x \in E$, et U un voisinage ouvert de Tx dans F. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{y \in F; q_n(Tx - y) < \varepsilon\} \subset U.$$

Par hypothèse il existe C et j tels que

$$p_j(x - x') < \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow q_n(Tx - Tx') < \varepsilon$$

et donc pour de tels x', $Tx' \in U$, et donc T est bien continue.

$\square$

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus et applications

Le but de cette section est d'énoncer des résultats vus dans le cours de topologie et calcul différentiel dans le cadre plus général des espaces de Fréchet.

Théorème 2.2.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E (resp. F) un espace de Fréchet (resp. pré-Fréchet) dont la topologie est définie par la famille dénombrable de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Soit T_α une famille d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$ la famille $(T_\alpha(x))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est bornée dans F. Alors $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est équi-continue : pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que $q_k(T_\alpha x) < Cp_j(x)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $x \in E$.*

En particulier, si E et F sont des espaces de Banach, en considérant les deux normes associées on retrouve la version du théorème de Banach-Steinhaus vue dans le cours de topologie. La preuve fonctionne essentiellement de la même mani'ere dans ce cadre plus général.

Proof. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$E_n := \{x \in E; \quad \sup_\alpha q_k(T_\alpha(x)) \leqslant n\}.$$

Les E_n sont fermés et leur union est égale à E par hypothèse (via la Proposition 2.1.6). Par application du théorème de Baire, il existe N tel que $\text{int}(E_n)$ soit non-vide. Il existe alors $x_0 \in E_n$, $j \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{x; \quad p_j(x - x_0) < \varepsilon\} \subset E_N.$$

En prenant B_j la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour p_j, on a pour tout $x \in B_j$

$$q_k(T_\alpha x) = \varepsilon^{-1} q_k(T_\alpha \varepsilon x) \leqslant \varepsilon^{-1}(q_k(T_\alpha(\varepsilon x - x_0)) + q_k(Y_\alpha x_0)) \leqslant 2\varepsilon^{-1} N.$$

On conclut par homogénéité. □

Corollaire 2.2.2. *Soit E et F deux espaces de Fréchet, et (T_n) une famille d'applications linéaires continues de E dans F, convergeant simplement vers T. Alors T est une application linéaire continue de E dans F, et de plus si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E convergeant vers x, alors $T_n(x_n)$ converge vers $T(x)$.*

Proof. Comme pour tout $x \in E$ la suite $(T_n(x))$ est convergente donc bornée, par application du théorème de Banach-Steinhaus la famille (T_n) est équi-continue. La conclusion suit. □

Théorème 2.2.3 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit T une application in-áire contnue surjective entre deux espaces de Fréchet. Alors elle est ouverte, c'est à dire que l'image d'un ouvert par T est encore un ouvert. Si de plus T est bijective, alors c'est un homeomorphisme.*

La preuve repose aussi sur le même principe que dans un espace de Banach.

Proof. On considère deux familles de semi-normes induisant les topologies de E et F, ainsi que les distance d_E et d_F proposées dans la définition des espaces de Fréchet. Nous allons montrer que

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0 \;\; \forall x \in E, \;\; B_F(Tx, \rho) \subset \overline{T(B_E(x, r))}.$$

On pourra ensuite conclure en appliquant le Lemme 2.2.4 ci-dessous. Comme T est linéaire et que les distances considérées sont invariantes par translation, il suffit de le montrer pour $x = 0$.

Comme T est linéaire surjective, $F = \cup_{n>1} n\overline{T(B_E(0, r/2))}$. Par le théorème de Baire, l'un de ces espaces est d'intérieur non-vide, et donc tous car les homothéties sont des homéomorphismes. Il existe donc $y \in F$ et $\rho > 0$ tels que

$$B_F(y, \rho) \subset \overline{T(B_E(0, r/2))}.$$

Alors

$$B_F(0, \rho) = -y + B_F(y, \rho) \subset -y + \overline{T(B_E(0, r/2))}$$

et donc, par linéarité et symétrie de T, on a

$$B_F(0, \rho) \subset \overline{T(B_E(0, r/2))} + T(B_E(\bar{0}, r/2)) \subset \overline{T(B_E(0, r))}$$

ce qui conclut la preuve. □

La preuve a utilisé le lemme suivant (qui n'utilise pas de structure linéaire sur E et F) :

Lemme 2.2.4. *Soit E un espace métrique complet, F un espace métrique et T : $E \longrightarrow F$ continue. Supposons que*

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0 \ \forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho) \subset \overline{T(B_E(x, r))}.$$

Alors

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0 \ \forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho) \subset T(B_E(x, 3r)).$$

Proof. Soient r et ρ associés comme dans l'hypothèse. On considère une suite ρ_n qui décroit vers 0, avec $\rho_0 = \rho$ et telle que

$$\forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho_n) \subset \overline{T(B_E(x, 2^{-n}r))}.$$

Soit x fixé et $y \in B_F(Tx, \rho)$. Notre but est de montrer que $y \in T(B_E(x, 3r))$.

On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, initialisée à $x_0 = x$, et telle que $T(x_n) \in B_F(y, \rho_n)$ et $x_n \in B_E(x_{n-1}, 2^{1-n}r)$. Cette propriété est bien vraie pour $x_0 = x$. Supposons $x_0, ..., x_{n-1}$ construits. Alors

$$y \in B_F(T(x_{n-1}), \rho_{n-1}) \subset \overline{T(B_E(x_{n-1}, 2^{-n}r))}$$

par construction. On peut donc trouver un point de $B_E(x_{n-1}, 2^{-n}r)$ dont l'image par T est arbitrairement proche de y. Donc en particulier, il existe $x_n \in B_E(x_{n-1}, 2^{-n}r)$ tel que $T(x_n) \in B_F(y, \rho_n)$, ce qui termine la construction.

On a alors

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leqslant r \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-n-k} < r2^{1-n}.$$

C'est donc une suite de Cauchy, donc elle est convergente vers une limite x'. De plus, $d(x, x') < 3r$ (en prenant $n = 0$ et $p \longrightarrow \infty$). Par continuité de T, et comme $d(T(x_n), y) \leqslant \rho_n \longrightarrow 0$, on en déduit que $T(x') = y$. Donc $y \in T(B_E(x, 3r))$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 2.2.5 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soit T une application linéaire entre deux espaces de Fréchet. Alors elle est continue si et seulement si son graphe $G = \{(x, T(x)); \ x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.*

Proof. Il est toujours vrai que si une application est continue alors son graphe est fermé.

Réciproquement, dans le cadre de ce théorème, si le graphe est fermé, c'ets un sous-espace vectoriel fermé dans l'espace de Fréchet $E \times F$, donc c'est aussi un espace de Fréchet.

La projection $\pi_1 : G \longrightarrow E$ qui a (x, y) associe x est continue, linéaire et bijective, donc un isomorphisme par le théorème de l'application ouverte. Comme $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ (où π_2 est la projection sur la deuxième coordonée), on en déduit que T est continue. □

2.3 Théorèmes de Hahn-Banach

2.3.1 Forme analytique

On donne d'abord la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, déjà vue dans le cours de topologie et calcul différentiel dans le cas des espaces vectoriels normés, et généralisée ici au cas des semi-normes. On rappelle que ce résultat utilise l'axiome du choix.

Théorème 2.3.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'une semi-norme p, et soit G un sous-espace vectoriel de E. Soit g une forme linéaire sur G telle que*

$$g(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g et telle que

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E.$$

Proof. On considère $\mathcal{C}$ l'ensemble des couples (H, h) avec H sous-ev de E contenant G, et h forme linéaire sur H prolongeant g, et telle que $h \leqslant p$ sur H. Cet ensemble est non-vide, car il contient (G, g). On munit $\mathcal{C}$ de la relation d'ordre

$$(H_1, h_1) \leqslant (H_2, h_2) \text{ ssi } H_1 \subset H_2 \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

Si (H_α, h_α) est un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{C}$, il admet pour majorant

$$H := \cup_\alpha H_\alpha, \;\; h(x) := h_i(x) \;\; \forall x \in H_i.$$

Ce couple est bien défini et dans $\mathcal{C}$ car on a considéré un sous-ensemble totalement ordonné. Le lemme de Zorn nous donne alors l'existence d'un éément maximal (F, f). Il nous suffit alors de montrer que $F = E$ pour conclure la preuve. Par l'absurde, supposons que il existe $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin F$. Si on arrive à prolonger f à $F_0 := F \oplus \mathbb{R}x_0$ en gardant la contrainte $f \leqslant p$, on aura une contradiction avec la maximalité de (F, f).

Pour tout $(x, y) \in F^2$, on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + y_0)$$

et donc

$$\sup_{x \in F} f(x) - p(x - x_0) \leqslant \inf_{y \in F} p(y + x_0) - f(y).$$

Soit α un réel tel que

$$\sup_{x \in F} f(x) - p(x - x_0) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in F} p(y + x_0) - f(y).$$

On pose

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \;\; \forall x \in F, \; t \in \mathbb{R}.$$

C'est une forme linéaire qui prolonge f. Si $t > 0$, on a

$$h(x + tx_0) = th(t^{-1}x + x_0) = t(f(t^{-1}x) + \alpha) \leqslant tp(t^{-1}x + x_0) = p(x + tx_0).$$

Et si $t < 0$, on a

$$h(x+tx_0) = -th(-t^{-1}x - x_0) = -t(f(-t^{-1}x) - \alpha) \leqslant -tp(-t^{-1}x - x_0) = p(x+tx_0).$$

On a donc prolongé f par h en respectant la contrainte $h \leqslant p$, ce qui contredit la maximalité de (F, f). □

Corollaire 2.3.2. *Si f est une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel G d'un espace vectoriel normé E, alors elle peut être prolongée à une forme linéaire continue sur E, de même norme que sur G.*

Proof. Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec $p(x) = ||f||_{G^*}||x||_E$. □

Corollaire 2.3.3. *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$. Il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f(x_0) = ||x_0||_E^2$ et $||f||_{E^*} = ||x_0||_E$.*

Proof. On applique le théorème de Hahn-Banach à $g(tx_0) = t||x_0||^2$ (définie sur $\mathbb{R}x_0$). □

Corollaire 2.3.4. *Soit E un espace vectiriel normé. Alors*

$$\forall x \in E, \quad ||x||_E = \sup_{||f||_{E^*} \leqslant 1} f(x) = \max_{||f||_{E^*} \leqslant 1} f(x).$$

Proof. Par définition de la norme duale on a $||x|| \geqslant \sup\limits_{||f||_{E^*} \leqslant 1} f(x)$. En prenant la forme linéaire définie dans le corollaire précédent et en divisant par $||x||_E$ on obtient l'égalité. □

Corollaire 2.3.5. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible sur E est séparée.*

Proof. Soit x et y deux éléments distincts de E. Comme $||x-y||_E \neq 0$, d'après le corollaire précédent il existe une forme linéaire continue f telles que $f(x-y) \neq 0$. La famille de semi-normes définissant la topologie faible est donc séparante, et donc la topologie faible est séparée. □

En particulier, la topologie faible sur un espace vectoriel normé en fait un EVTLCS.

2.3.2 Forme géométrique

Nous allons maintenant voir la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

Définition 2.3.6. *Un hyperplan affine fermé d'un espace vectoriel topologique est un sous-espace affine H de la forme $\{x; f(x) = \alpha\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et f est une forme linéaire continue non-nulle.*

Un hyperplan affine $H = \{x; f(x) = \alpha\}$ sépare deux ensembles A et B si $A \subset \{f \leqslant \alpha\}$ et $B \subset \{f \geqslant \alpha\}$.

Un hyperplan affine $H = \{x; f(x) = \alpha\}$ sépare strictement deux ensembles A et B si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset \{f \leqslant \alpha - \varepsilon\}$ et $B \subset \{f \geqslant \alpha + \varepsilon\}$.

Théorème 2.3.7. *Soit E un espace vectoriel topologique, et A et B deux convexes disjoints de E.*

1. *Si A est ouvert alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B.*

2. *Si E est localement convexe, A est compact et B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.*

La preuve s'appuiera sur le lemme suivant :

Lemme 2.3.8. *Soit E un EVT, C un ouvert convexe non vide de E, et $x_0 \notin C$. Alors il existe une forme linéaire continue sur E telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.*

Autrement dit, il existe un hyperplan séparant $\{x_0\}$ et C (au sens large).

Proof. Quitte à translater, on peut supposer $0 \in C$, et donc que C est un voisinage de l'origine. Soit j_C la jauge de C et g la forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0$ définie par $g(tx_0) = t$. Comme $x_0 \notin C$, on a $j_C(x_0) \geqslant 1$, et donc $j_C(tx_0) \geqslant g(tx_0)$ pour $t \geqslant 0$. Cette inéalité étant trivialement vraie pour les t négatifs, on peut appliquer la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, et soit f la forme linéaire prolongeant g ainsi obtenue. Il nous reste à montrer que f est continue.

Si $x \in \varepsilon C \cap (-\varepsilon C)$, alors

$$|f(x)| \leqslant j_C(x) \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en 0, et donc partout. $\square$

Preuve du Théorème 2.3.7 . Commençons par le premier cas. Soit A convexe ouvert, et B convexe non vide avec $A \cap B = \varnothing$. Soit $C = \{a - b; a \in A, b \in B\}$ c'est un convexe non-vide, et ouvert car $C = \cup_{y \in B}(A - y)$. C ne contient pas 0 car A et B sont disjoints. En appliquant le lemme précédent avec $x_0 = 0$, il existe une forme linéaire continue f telle que $f < 0$ sur C. Donc $f(a) < f(b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. En prenant $\alpha = \sup_A f(a) \leqslant \inf_B f(b)$, on voit que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large. Cet hyperplan est fermé car f est continue.

Supposons maintenant A compact et B fermé. Comme B est fermé, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage ouvert V_x de 0 tel que $(x+V_x) \cap B = \varnothing$. Par continuité de $(x, y) \longrightarrow x + y$, il existe un voisinage ouvert convexe symétrique W_x de 0 tel que $W_x + W_x \subset V_x$.

Comme A est compact, il existe $x_1, ..., x_n \in A$ tels que $A \subset \cup_i(x_i + W_{x_i})$. En posant $W = \cap W_{x_i}$, on a $A + W$ disjoint de B car si $x \in A + W$, il existe i tel que $x \in (x_i + W_{x_i} + W_{x_i}) \subset (x_i + V_{x_i})$. Comme $A + W$ est un ouvert convexe, on peut le séparer au sens large de B, et donc il existe une forme linéaire continue f telle que

$$f(a) + f(w) \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, w \in W, b \in B.$$

Comme f est non nulle et W est un voisinage ouvert symétrique de l'origine, il existe $w \in W$ tel que $f(w) > 0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 2.3.9. *Soit $x \in E$ et C un convexe de E. Alors $x \in \bar{C}$ ssi*

$$\forall f \in E^*, \quad f(x) \leqslant \sup_{y \in C} f(y).$$

Proof. Par contradiction, si $x \notin \bar{C}$, on pourrait trouver un hyperplan qui sépare strictement $\{x\}$ de $\bar{C}$. $\square$

2.4 Dualité et topologie faible

Définition 2.4.1. *Soit E un EVTLCS, et E^* son dual. On appelle topologie forte sur E^* la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$q_B(f) = \sup_{x \in B} |f(x)|; \quad B \subset E \textit{ borné}.$$

On appelle topologie faible- sur E^* la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$q_x(f) = |f(x)|, \quad x \in E.$$

On peut aussi considérer la topologie faible sur E^*, relativement au bidual E^{**}. Cette topologie est plus faible que al topologie forte, mais plus forte que la topologie faible-*.

Si E est un espace vectoriel normé, la topologie forte sur E^* coincide avec celle définie par la norme $||f||_{E^*} = \sup_{||x||_E \leqslant 1} f(x)$.

Un des avantages de la topologie faible-$*$ est que la compacité est une propriété aisément vérifiée :

Théorème 2.4.2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Soit E un EVTLCS, U un voisinage de 0 et*
$$K := \{f \in E^*;\ \ |f(x)| \leqslant 1 \ \ \forall x \in U\}.$$
Alors K est compact pour la topologie faible- sur E^*.*

Si E est un espace de Banach, on peut prendre pour U la boule unité. Le critère de compacité est alors d'être borné pour la norme opérateur (pas pour la topologie faible-*) et fermé.

Proof. Soit p une semi-norme continue sur E telle que $B_p := \{p \leqslant 1\} \subset U$. On a $K \subset K_0$ avec
$$K_0 := \{f \in E^*;\ \ |f(x)| \leqslant 1 \ \ \forall x \in B\} = \{f \in E^*;\ \ |f(x)| \leqslant p(x) \ \ \forall x \in E\}.$$
Comme K est un sous-ensemble fermé de K_0, il suffit de montrer que K_0 est compact. Soit $Y = \mathbb{R}^E$ muni de la topologie produit, et $\Phi : E^* \longrightarrow Y$ définie par $\Phi(f) = (f(x))_{x\in E}$. C'est une application linéaire injective, continue lorsqu'on munit E^* de la topologie faible-*. Et comme la topologie faible-* est basée sur l'évaluation en chaque point, Φ^{-1} est continue sur $\Phi(E^*)$. Il nous suffit donc de montrer que $\Phi(K_0)$ est compact.

On a $\Phi(K_0) = A \cap B$ avec
$$A := \{\omega \in Y;\ \ \ |\omega_x| \leqslant p(x) \ \ \forall x \in E\} = \prod_{x\in E} [-p(x), p(x)];$$
$$B := \{\omega \in Y;\ \ \ \omega_{x+\lambda y} = \omega_x + \lambda \omega_y \ \ \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
A est compact par application du théorème de Tychonov, et B est fermé par continuité des projections canoniques. Donc $\Phi(K_0)$ est bien compact, ce qui termine la preuve. □

Il est souvent plus aisé d'utiliser la compacité séquentielle, ce qui est permis par le résultat suivant :

Proposition 2.4.3. *Soit E un EVTLCS séquentiellement séparable, et p une semi-norme continue sur E. Alors la topologie faible-* sur E^* est métrisable sur $\{f \in E^*;\ \ |f(x)| \leqslant p(x) \ \ \forall x \in E\}$.*

A noter qu'on a la métrisabilité sur les ensembles bornés, mais pas forcément sur l'espace tout entier. Si l'espace de base n'est pas séparable, il est possible que on n'ait pas la compacité séquentielle des ensembles bornés de E^* pour la topologie faible-* (bien qu'on ait la compacité).

Proof. Notons $K = \{f \in E^*;\ |f(x)| \leqslant p(x)\ \forall x \in E\}$. Soit $(x_n)_n$ une famille dénombrable dense dans $B = \{p \leqslant 1\} \subset E$. On considère la distance définie par

$$d(f,g) := \sum_n 2^{-n}|f(x_n) - g(x_n)|.$$

On v'erifie aisément que c'est bien une distance. Montrons qu'elle métrise bien la topologie faible-* sur K. Soit $f \in K$ et $r > 0$, le but est de montrer que $B(f,r)$ (la boule de centre f et de rayon r pour la distance d) est bien un voisinage de f pour la topologie faible-*.

Soit N tel que $\sum_{n \geqslant N} 2^{-n} < r/4$ et

$$V_{r/4,N} := \{g \in E^*;\ \sup_{i \leqslant N} |g(x_i) - f(x_i)| < r/4\}.$$

$V_{r/4,N} \cap K$ ets un voisinage de f pour la topologie faible-*, contenu dans $B(f,r)$. Réciproquement, montrons que tout voisinage de f pour la topologie faible-* contient une boule ouverte centrée en f. Soit $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $y_1, ..., y_k \in E$. On pose

$$U = \{g \in E^*;\ \sup_{i \leqslant k} |(g-f)(y_i)| < \varepsilon\}$$

le voisinage de f associé. Pour $i = 1, ..., k$ il existe n_i tel que $p(x_{n_i} - y_i) < \varepsilon/4$. Posons $r = \min_{i \leqslant k} \varepsilon 2^{-n_i - 1}$. Si $g \in B(f,r)$ alors pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ on a

$$|(f-g)(y_i)| \leqslant |(f-g)(x_{n_i})| + 2p(y_i - x_{n_i}) \leqslant 2^{n_i} r + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

On a donc bien $B(f,r) \subset U \cap K$. □

En combinant le théorème de Banach-Alaoglu et la métrisabilité de la topologie, on obtient :

Proposition 2.4.4. *Si p est une semi-norme sur E et si une suite (f_n) d'applications linéaires continues vérifie*

$$f_n(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$$

alors on peut en extraire une sous-suite convergente pour la topologie faible-.*

Remarque 2.4.1. *L'hypothèse de cette proposition n'est pas d'être borné au sens de la topologie faible-*.*

A noter que si l'espace est de Fréchet, en pratique le théorème de Banach-Steinhaus permet de vérifier le caractère borné d'une famille d'applications linéaires.

Exemple 2.4.1. *Le dual de L^p est L^q avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ lorsque $p > 1$. Lorsqu'on a une suite bornée dans L^p, on veut extraire une sous-suite telle que il existe $f \in L^p$ avec*

$$\int f_n g dx \longrightarrow \int f g dx$$

pour tout $g \in L^q$. En revanche, on n'a pas forcément $||f_n||_p \longrightarrow ||f||_p$ (et donc pas de compacité forte).

Chapter 3

Espaces de Banach

Dans tout ce chapitre, E sera un espace de Banach.

3.1 Topologies faibles sur les espaces de Banach

3.1.1 Topologie faible

Notation. *Si une suite (x_n) converge faiblement vers x, on notera $x_n \rightharpoonup x$.*

A note que comme la topologie faible est séparée, une limite faible est nécessairement unique.

Proposition 3.1.1. *Dans un espace de Banach*

1. *la convergence forte implique la convergence faible;*
2. *une suite faiblement convergente est bornée;*
3. *si $x_n \rightharpoonup x$ alors $||x|| \leqslant \liminf ||x_n||$;*
4. *si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \longrightarrow f$ dans E^* (au sens de la norme opérateur) alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.*

La convergence faible d'une suite n'implique pas la convergence forte, sauf en dimension finie et dans quelques cas très particuliers (comme l'espace ℓ^1).

Proof. La première partie est vraie par définition. Pour la seconde partie, on utilise le Corollaire 2.3.4 et le théorème de Banach-Steinhaus : en définissant $T_n(f) = f(x_n)$, on voit que c'est une suite bornée pour tout f, donc ces opérateurs sont uniformément bornés sur E^* : il existe $C > 0$ tel que $|f(x_n)| \leqslant C||f||_*$ pour tout n et f. Mais comme

$$||x|| = \sup_{||f||_* \leqslant 1} f(x)$$

on peut conclure. De plus, si $x_n \rightharpoonup x$ alors

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sup_{||f||_* \leqslant 1} f(x) \\ &= \sup_{||f||_* \leqslant 1} \lim_n f(x_n) = \sup_{||f||_* \leqslant 1} \liminf_n f(x_n) \\ &\leqslant \sup_{||f||_* \leqslant 1} \liminf_n ||f||_* ||x_n|| = \liminf_n ||x_n||. \end{aligned}$$

Pour la dernière partie, on a

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| &\leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leqslant ||f_n - f||_* \sup_k ||x_k|| + |f(x_n) - f(x)|\end{aligned}$$

et le caractère borné de la suite (x_n) permet de conclure. □

Lemme 3.1.2. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Alors l'adhérence de la sphère unité $S := \{x; ||x|| = 1\}$ pour la topologie faible est la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.*

En particulier, en dimension infinie la topologie forte et la topologie faible ne coincident pas.

Proof. Soit x_0 avec $||x_0|| < 1$. Le but est de montrer que tout voisinage de x_0 pour la topologie faible intersecte S. Soit V un tel voisinage. Par définition de la topologie faible, il existe une famille finie de forme linéaires $f_1, ..., f_k$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\{x;\ \max_i |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\} \subset V$. Comme l'espace est de dimension infinie, il existe y non-nul tel que $f_i(y) = 0$ pour tout i. Alors il existe $t \neq 0$ tel que $||x_0 + ty|| = 1$ (par continuité de la norme) et $x_0 + ty \in V$ (car $f_i(x_0 + ty) = f_i(x_0)$ pour tout i), ce qui conclut la preuve. □

De manière plus générale, on a montré qu'en dimension infinie, tout ensemble d'intérieur non-vide pour la toplogie faible contient un sous-espace affine non-trivial. En particulier, dans un espace de Banach de dimension infinie, les voisinages faibles ne sont jamais bornés pour la topologie forte. Ceci justifie par exemple qu'on ne peut pas utiliser les jauges pour munir la topologie faible d'une norme.

En revanche, si on part d'un ensemble convexe, on évite le phénomène du Lemme 3.1.2 :

Proposition 3.1.3. *Soit C un sous-ensemble convexe d'une espace de Banach, fermé pour la topologie forte. Alors il est faiblement fermé.*

A noter que la réciproque est vraie en général : un ensemble faiblement fermé est fortement fermé.

Proof. Il nous faut montrer que $E \backslash C$ est faiblement ouvert, c'est à dire que si $x \in E \backslash C$ il existe un voisinage faible de x qui est inclus dans $E \backslash C$. D'après la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan fermé qui sépare C et $\{x\}$, donc a fortiori une forme linéaire continue tel que $\{y;\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$ n'intersecte pas C. On a donc bien un voisinage faible qui convient. □

Corollaire 3.1.4 (Lemme de Mazur)**.** *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x. Alors il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in \mathrm{conv}(\{x_k, k \geqslant n\})$ qui converge fortement vers x.*

Proof. Soit C_n l'enveloppe convexe des x_k pour $k \geqslant n$. $\bar{C}_n$ est un convexe fortement fermé, donc faiblement fermé, et c'est a fortiori aussi le cas pour $\cap_n \bar{C}_n$. Mais comme x est dans l'adhérence faible des C_n, la conclusion suit. □

Exercice 3.1.1. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et s.c.i. pour la topologie forte. Montrer qu'elle est s.c.i. pour la topologie faible.*

Solution 3.1.1. *Comme f est convexe et fortement s.c.i., ses ensembles de sous-niveaux $\{f \leqslant \lambda\}$ sont convexes et fortement fermés, donc faiblement fermés. On en déduit que f est faiblement s.c.i.*

Exercice 3.1.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue pour les topologies fortes sur les deux espaces ssi elle est continue pour les topologies faibles sur les deux espaces.*

Solution 3.1.2. *Supposons T fortement continue. Soit $f \in F^*$. Alors $f \circ T$ est une forme linéaire fortement continue sur E, donc faiblement continue. Soit U un ouvert faible de F. Il est de la forme*

$$U = \cup_{k \in K} \cap_{i \in I_j} f_i^{-1}(w_j)$$

où les I_j sont finis, $f_i \in F^*$ et les w_j sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Alors

$$T^{-1}(U) = \cup_{k \in K} \cap_{i \in I_j} (f_i \circ T)^{-1}(w_j)$$

est donc un ouvert faible de E, et donc T est continue pour les topologies faibles.

Réciproquement, si T est continue pour les topologies faibles, son graphe est faiblement fermé, et donc fortement fermé. On conclut en appliquant le théorème du graphe fermé.

3.1.2 Topologie faible-$*$

Proposition 3.1.5. *La topologie faible-$*$ sur E^* est la topologie la moins fine rendant continue les applications*

$$f \in E^* \longrightarrow f(x), \quad x \in E.$$

On peut aussi munir E^* de sa topologie faible, par rapport au bidual E^{**}. La topologie faible-* est en général plus faible que la topologie faible.

Notation. *Etant donné $x \in E$, on notera $j(x)$ l'élément de E^{**}*

$$f \longrightarrow f(x).$$

Proposition 3.1.6. *E est isométrique à un sous-espace de E^{**} via le plongement canonique $x \longrightarrow j(x)$.*

Remark 3.1.1. *Comme E est complet, en particulier $j(B_E)$ est (fortement) fermé (par exemple comme conséquence du théorème de l'application ouverte).*

La preuve ci-dessous de ce résultat utilise le théorème de Hahn-Banach, et donc l'axiome du choix. Si on souhaite travailler sans l'axiome du choix, les espaces de Banach pour laquelle cette preuve marche sont appelés espaces linéairement normalisables [13, Définition VII-77].

Proof. Il faut seulement montrer que $||x||_E = ||\tilde{x}||E^{**}$. Pour tout $f \in E^*$, on a $|f(x)| \leqslant ||f||_{E^*}||x||_E||$ donc $||\tilde{x}||_{E^{**}} \leqslant ||x||_E$. Il nous reste à démontrer l'inégalité inverse. En considérant l'extension de la forme linéaire $f(\lambda x) = \lambda ||x||_E$ sur $\mathbb{R}x$ donnée par la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, on a une forme linéaire de norme 1 telle que $\tilde{x}(f) = f(x) = ||x||_E$. Donc $||\tilde{x}||_{E^{**}} \geqslant ||x||_E$, ce qui conclut la preuve. □

Par abus de langage, on identifiera dorénavent souvent x et $j(x)$.

Il peut très bien y avoir des éléments de E^{**} qui ne sont pas associés à des éléments de E. Par exemple, on verra plus tard que le bidual de l'espace L^1 est strictement plus gros que L^1 en général (en utilisant l'axiome du choix, via le théorème de Hahn-Banach).

On peut se demander à quel point E^{**} est plus grand que E. Il s'avère que les éléments de $E^{*}*$ peuvent être approchés par des éléments de E, au sens suivant :

Théorème 3.1.7 (Lemme de Goldstine). *Soit ζ un élément de E^{**}, $f_1, ..., f_N$ une famille finie d'éléments de E^* et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N > 0$. Alors il existe $x \in E$ tel que $||x|| \leqslant ||\zeta||$ et $|f_i(x) - \zeta(f_i)| < \varepsilon_i$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$. En d'autres termes, E est dense dans E^{**} pour la topologie faible-$*$.*

Attention, ça ne donne pas d'approximation sur une famille infinie de formes linéaires, donc on n'a pas de borne sur $||x-\zeta||_{E^{**}}$. C'est normal, E n'est en général pas dense dans E^{**} pour la topologie forte.

Proof. Sans perdre de généralité, supposons que $||\zeta|| = 1$. Soit $\Phi(x) = (f_i(x))_{i=1..N}$ et $z = (\zeta(f_i))_{i=1..N}$. Nous allons montrer que $z \in \overline{\Phi(B(0,1))}$ en utilisant le Corollaire 2.3.9 car $\Phi(B(0,1))$ est un convexe de $\mathbb{R}^N$. Soit g une forme linéaire sur $\mathbb{R}^N$, qui peut s'écrire comme le produit scalaire avec un vecteur $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$. On a

$$g(z) = \sum \alpha_i \zeta(f_i) = \zeta\left(\sum \alpha_i f_i\right) \leqslant \left|\left|\sum \alpha_i f_i\right|\right|$$

car $||\zeta|| = 1$. Mais

$$\sup_{\Phi(B(0,1))} g(y) = \sup_{||x||<1} g(\Phi(x)) = \sup_{||x||<1} \sum \alpha_i f_i(x) = \left|\left|\sum \alpha_i f_i\right|\right|.$$

On a donc bien $g(z) \leqslant \sup_{\Phi(B(0,1))} g(y)$ pour tout $g \in (\mathbb{R}^N)^*$, et on peut conclure en appliquant le Corollaire 2.3.9. □

3.2 Espaces réflexifs

Définition 3.2.1 (Espace réflexif). *Un espace de Banach est dit réflexif si l'application j définie dans la Notation 3.1.2 est surjective.*

En d'autres termes, un espace est réflexif si on peut l'identifier avec son bidual via l'application j. Les espaces L^p avec $1 < p < \infty$ sont réflexifs (puisque $(L^p)^* = L^q$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ dans ce cas), mais L^1 et L^∞ ne le sont pas en général (on verra les preuves plus tard).

Remark 3.2.1. *C'est spécifiquement l'application j qui est une isomŕie entre E et E^{**} dans cette définition. Il existe des espaces non réflexifs (en particulier, un espace connu sous le nom d'espace de James) tels que E soit quand même isométrique à E^{**}.*

Exemple 3.2.1. *Les espaces de Hilbert sont réflexifs, comme conséquence du théorème de représentation de Riesz.*

Exemple 3.2.2. *L'espace $(C_b([-1,1],\mathbb{R}),||\cdot||_\infty)$ n'est pas réflexif. En effet, s'il l'était, pour toute forme linéaire ℓ sur cet espace, il existerait une fonction f telle que*

$$||\ell||_{op} = \ell(f)$$

, d'après le Corollaire 2.3.4. Soit

$$\ell(g) = \int_{-1}^{0} g(t)dt - \int_{0}^{1} g(t)dt.$$

Trivialement, $||\ell|| \leqslant 2$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut aisément trouver une fonciton g telle que $\ell(g) \geqslant 2-\varepsilon$ et $||g||_\infty \leqslant 1$. Donc $||\ell|| = 1$. Mais on peut aussi aisément vérifier que il n'existe aucune fonciton g avec $||g||_\infty \leqslant 1$ et $\ell(g) = 2$. On a donc une contradiction, et donc $(C_b([-1,1],\mathbb{R}),||\cdot||_\infty)$ n'est pas réflexif.

Théorème 3.2.2 (Théorème de Kakutani)**.** *Un espace de Banach est réflexif si et seulement si sa boule unité est compacte pour la topologie faible.*

Proof. Commençons par montrer que si l'espace est réflexif, la boule unité est compacte. On peut identifier E et E^{**} (et donc leurs boules unité) via l'isométrie j. En particulier, la boule unité de E^{**} est faible-* compacte, par le théorème de Banach-Alaoglu. Il suffit alors de montrer que j^{-1} est continue de $B_{E^{**}}$ (muni de la topologie faible-*) vers E (muni de la topologie faible) pour conclure. Ceci revient à montrer que pour tout $f \in E^*$, $z \longrightarrow f(j^{-1}(z))$ est continue pour la topologie faible-* sur E^{**}. Or si $z \in E^{**}$, il existe $x \in E$ tel que $z = j(x)$. Donc

$$f(j^{-1}(z)) = f(x) = z(f)$$

donc $f \circ j^{-1}$ est bien continue pour la topologie faible-*.

Réciproquement, supposons que la boule unité de E est faiblement compacte. Comme J est continue pour les topologies fortes et qu'elle est linéaire, elle est continue pour les topologies faibles (cf. Exercice 3.1.2). Comme la topologie faible-* sur E^** (vu comme dual de E^*) est moins fine que la topologie faible sur E^{**} (relativement à l'espace E^{***}), j est continue de E (muni de sa topologie faible) vers E^{**} muni de sa topologie faible-*. En particulier, $j(B_E)$ est alors compacte pour la topologie faible-*. Mais comme d'après le lemme de Goldstine $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie faible-*, on a $j(B_E) = B_{E^{**}}$, et donc $j(E) = E^{**}$. $\square$

Corollaire 3.2.3. *Soit E un espace réflexif, et K une partie bornée et faiblement fermée de E. Alors K est faiblement compacte.*

En particulier, si K est convexe, fortement fermée et bornée, elle est faiblement compacte.

Proof. K est incluse dans une boule, qui est faiblement compacte d'après le théorème de Kakutani, donc K est relativement compacte pour la topologie faible. Comme elle est faiblement fermée, elle est alors faiblement compacte.

La seconde partie suit car les convexes fortement fermés sont faiblement fermés, d'après la Proposition 3.1.3. $\square$

Corollaire 3.2.4. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace réflexif. Alors F (muni de la topologie induite par la norme sur E) est réflexif.*

Proof. La boule unité de F est convexe et fortement fermée, donc faiblement fermée. Elle est aussi relativement compacte pour la topologie faible. Donc elle est faiblement compacte, donc F est réflexif d'après e théorème de Kakutani. $\square$

Corollaire 3.2.5. *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Proof. Si E est réflexif, la topologie faible-* sur E^* coincide avec sa topologie faible (relativement à $E^**=E$). Comme sa boule unité est faible-* compacte, elle est faiblement compacte, et donc E^* est réflexif d'après le théorème de Kakutani.

Réciproquement, si E^* est réflexif, alors E^{**} l'est aussi d'après le cas précédent. Et comme j est une isométrie, $j(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E^{**}, donc est réflexif d'après le Corollaire 3.2.4. $\square$

Corollaire 3.2.6. *Soit E un espace de Banach réflexif, C un convexe fermé de E, et $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement, non-identiquement égale à $+\infty$, et telle que*

$$\lim_{||x|| \to \infty, x \in C} f(x) = +\infty.$$

Alors f admet un minimum.

La condition de croissance à l'infini est automatiquement vraie si on suppose que C est borné.

Proof. Soit $x \in E$ tel que $f(x) < \infty$. Alors $A := \{y; f(y) \leqslant f(x)\}$ est un convexe fortement fermé, et borné, donc faiblement compact. Comme f est convexe et fortement s.c.i., elle est faiblement s.c.i., et donc f atteint un minimum sur A, qui est aussi un minimum global. $\square$

Théorème 3.2.7. *Soit E un espace de Banach. Si E^* est séparable alors E l'est.*

Proof. Soit (f_n) une suite dénombrable dense. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n|| = 1$ et $f_n(x_n) \geqslant ||f_n||/2$. Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires de x_n à coefficients rationnels, qui est par construction dénombrable. Montrons que F est dense dans E. Il suffit de montrer que $G = \mathrm{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans E. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire continue nulle sur G est nulle sur E.

Soit $\varepsilon > 0$ et f une forme linéaire continue nulle sur G, et f_n telle que $||f_n - f|| \leqslant \varepsilon/3$. Alors

$$||f|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + ||f_n|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2f_n(x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2(f_n - f)(x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, f est nulle sur E. $\square$

Corollaire 3.2.8. *Si E est un espace de Banach réflexif et séparable, alors son dual est séparable.*

Ce résultat peut être faux sans l'hypothèse de réflexivité. On verra plus tard que $L^1(\mathbb{R})$ est séparable mais que son dual $L^\infty(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

Proof. Comme E est réflexif et séparable, E^{**} est séparable, et donc E^* l'est par le Théorème 3.2.7. $\square$

Corollaire 3.2.9. *Soit (x_n) une suite bornée dans un espace de Banach réflexif E. Alors elle admet une sous-suite faiblement convergente.*

Proof. Soit $F = \overline{\mathrm{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$. F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace réflexif, donc est réflexif. De plus, il est séparable par construction. Donc F^* est aussi séparable, et la topologie faible-* sur son dual est métrisable. Mais comme F est réflexif, cette topologie coincide avec la topologie faible sur F, qui est donc métrisable.

Comme de plus la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie faible, elle admet une sous-suite faiblement convergente dans F, et donc dans E. $\square$

3.3 Espaces uniformément convexes

3.3.1 Propriétés principales

Définition 3.3.1 (Espace uniformément convexe)**.** *Un espace de Banach est dit uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in B_E$, si $||x - y|| \geqslant \varepsilon$ alors*

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leqslant 1 - \delta.$$

Cette propriété d'uniforme convexité peut être visualisée comme disant que la boule unité est "'bien ronde"'. Nous verrons plus tard que les epsaces L^p sont uniformément convexes si $1 < p < +\infty$.

Exemple 3.3.1. *Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, via l'identité du parallélogramme:*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

La motivation principale pour cette notion dans ce cours est que c'est un critère utile pour démontrer la réflexivité :

Théorème 3.3.2 (Milman-Pettis)**.** *Les espaces de Banach uniformément convexes sont réflexifs.*

Remark 3.3.1. *La réciproque ne peut pas être vraie, car la réflexivité est une notion topologique, donc invariante par changement de norme équivalente, alors que l'uniforme convexité ne l'est pas. Par exemple, $\mathbb{R}^d$ muni de la norme ℓ^2 est uniformément convexe, mais ne l'est pas si on le munit de la norme ℓ^1 ou ℓ^∞.*

Proof. Soit E un espace uniformément convexe. Le but est de montrer que $j(B_E) = B_{E^{**}}$. Comme $j(B_E)$ est (fortement) fermé et convexe, il suffit de montrer que tout élément de la sphère unité de E^{**} est dans l'adhérence (forte) de $j(B_E)$.

Soit $\zeta \in E^{**}$ avec $||\zeta||_{E^{**}} = 1$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons justifier l'existence de $x \in E$ tel que $||j(x) - \zeta||_{E^{**}} \leqslant \varepsilon$. Comme E est uniformément convexe, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in B_E$ avec $||x - y|| \geqslant \varepsilon$ alors $||x + y|| \leqslant 2 - 2\delta$.

Soit $f \in E^*$ tel que $||f|| = 1$ et $\zeta(f) \geqslant 1 - \delta/2$. D'après le lemme de Goldstine, il existe $x \in E$ tel que

$$|\eta(f) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Supposons que $\zeta \notin \bar{B}_{E^**}(j(x), \varepsilon)$ (la boule fermée de centre $j(x)$ et rayon ε pour $||\cdot||_{E^{**}}$). Comme $E^{**}\backslash\bar{B}_{E^**}(j(x), \varepsilon)$ est ouvert pour la topologie faible-* sur E^{**} (car les boules fortement fermées sont faible-* fermées, par exemple comme conséquence du théorème de Banach-Alaoglu), d'après le lemme de Goldstine il existe y vérifiant

$$||y|| \leqslant ||\eta|| = 1; \quad ||j(x) - j(y)|| = ||x - y|| > \varepsilon; \quad |\zeta(f) - f(y)| < \frac{\delta}{2}.$$

En utilisant l'uniforme convexité, on a

$$||x + y|| \leqslant 2 - 2\delta.$$

Mais on a aussi

$$1 - \frac{\delta}{2} \leqslant \zeta(f) < \frac{f(x) + f(y)}{2} + \frac{\delta}{2} \leqslant \frac{||x + y||}{2} + + \frac{\delta}{2} \leqslant 1 - \frac{\delta}{2}.$$

On a donc une contradiction. Donc $\zeta \in \bar{B}_{E^{**}}(j(x), \varepsilon)$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.3.3. *Dans un espace de Banach uniformément convexe, une suite converge fortement ssi elle converge fortement et la suite des normes converge vers la norme de la limite faible.*

Dans la litérature, on appelle parfois ce type de propriété la propriété de Radon-Riesz.

Proof. La convergence forte implique la convergence faible et la convergence des normes sur les epsaces de Banach généraux, puisque la norme est une application 1-lipschitz. Il nous faut donc juste démontrer la réciproque.

Soit $x_n \rightharpoonup x$ telle que $||x_n|| \longrightarrow ||x||$. Si $x = 0$ la convergence forte est évidente, donc on peut supposer sans perdre de généralité que $x \neq 0$. Posons $\lambda_n := \max(||x_n||, ||x||)$, qui converge vers $||x||$, $y_n = \lambda_n^{-1} x_n$ et $y = x/||x||$. On a $(y_n + y)/2 \rightharpoonup y$, donc

$$\liminf \left|\left|\frac{y_n + y}{2}\right|\right| \geqslant ||y|| = 1.$$

Mais comme $||y_n|| \leqslant 1$, on a alors

$$\left|\left|\frac{y_n + y}{2}\right|\right| \longrightarrow 1.$$

L'uniforme convexité implique alors que $||y_n - y|| \longrightarrow 0$, ce qui implique que $||x_n - x|| \longrightarrow 0$. □

Théorème 3.3.4 (Projection sur un fermé)**.** *Soit E un espace de Banach uniformément convexe, et C un convexe fermé non-vide. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que*

$$p_C(x) \in \arg\min_{y \in C} ||y - x||.$$

L'existence est en fait vraie dans les espaces réflexifs, mais l'unicité utilisera l'uniforme convexité. La fonction p_C joue le rôle de la projection dans le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert, vu dans le cours de Topologie et Calcul Différentiel.

Proof. Sans perdre de généralité, il nous suffit de montrer l'existence et l'unicité de $p_C(0)$ pour tout convexe fermé, et le cas général suit par translation.

Soit $y_0 \in C$ et $\lambda = ||y_0||$. Sans perdre de généralité, on peut chercher un minimum sur $A = C \cap \bar{B}(0, \lambda)$, qui est aussi un convexe fermé, et maintenant borné. En particulier, A est faiblement compact. Comme de plus la norme est faiblement semi-continue inférieurement, il existe un point y en lequel la norme atteint son minimum sur A.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe y et z deux points distincts de norme minimale sur A. Alors par convexité

$$\min_A || \cdot || \leqslant ||ty + (1-t)z)|| \leqslant t||y|| + (1-t)||z|| \leqslant \min_A || \cdot ||.$$

Donc la norme atteint aussi son minimum sur A en les $ty + (1-t)z$ pour $t \in [0, 1]$. Mais apr uniforme convexité, si $||y - z|| > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\left|\frac{y+z}{2}\right|\right| \leqslant \frac{||y|| + ||z||}{2} - \delta$$

ce qui contredit la minimalité de y et z. Donc le minimum est unique.

□

3.3.2 Complément : super-reflexivité et plongements isométriques

Définition 3.3.5. *Un espace de Banach est dit super-réflexif s'il admet une norme équivalente qui le rend uniformément convexe.*

Cette façon de définir la super-réflexivité n'est pas la "'vraie"' définition. La définition historique est plus compliqée, et son équivalence avec la définition ci-dessus est dûe à Enflo [5].

Définition 3.3.6 (Distorsion). *Soit (A, d_A) et (B, d_B) deux espaces métriques. La distorsion de A dans B, notée $c_B(A)$, est l'inf de tous les $K > 0$ tels que il existe $s > 0$ et $\varphi : A \longrightarrow B$ tels que*

$$sd_A(x, y) \leqslant d_B(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant sKd_A(x, y).$$

Cette distorsion est une mesure de à quel point il faut déformer A pour l'envoyer dans B. Lorsque A se plonge isométriquement dans B, sa distorsion vaut 1. Lorsque B est un espace vectoriel normé, s ne joue aucun rôle car on peut remplacer φ par $s^{-1}\varphi$. On dit que A se plonge dans B si $c_B(A)$ est finie.

On considère un arbre binaire enraciné de hauteur n, et on le munit de sa distance de graphe. Soit T_n l'espace métrique discret ainsi défini.

Théorème 3.3.7 (Bourgain). *Un espace de Banach est non-super-réflexif ssi on peut y plonger avec une distorsion uniformément bornée tous les espaces T_n.*

Ce théorème reste vrai si on remplace les plongements uniformément lipschitz d'arbres binaires de tailles finies par le plongement lipschitz d'un arbre binaire infini.

Nous allons montrer une version partielle de ce résultat : on ne peut pas plonger de manière uniformément lipschitz tous les espaces T_n dans un espace p-uniformément convexe.

Définition 3.3.8. *Soit $p > 0$. Un espace de Banach est p-uniform'ement convexe si il existe $c > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\inf\left\{1 - \frac{||x+y||}{2};\ ||x|| = ||y|| = 1,\ ||x-y|| \geqslant \varepsilon\right\} \geqslant c\varepsilon^p.$$

En particulier, on verra que les espaces L^q sont p-uniformément convexe avec $p = \max(2, q)$. Les espaces de Hilbert sont 2-uniformément convexes comme conséquence de l'identité du parallélogramme.

Un théorème de Pisier [12] dit que si un espace de Banach est uniformément convexe, il existe $p > 0$ et une norme équivalente qui soit p-uniformément convexe.

Théorème 3.3.9 (Bourgain). *Si X est p-uniformément convexe, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$c_X(T_n) \geqslant C(\log n)^{1/p}$$

pour n assez grand.

Une conséquence purement géométrique est :

Corollaire 3.3.10. *On ne peut pas plonger isométriquement l'arbre binaire infini dans un espace de Hilbert.*

La preuve qu'on fera ci-dessous est dûe à Kloeckner [8].

Le raisonnement va être itératif : on va montrer que la distorsion du plongement d'un arbre de hauteur $n/2$ peut être nettement meilleure que celle du plongement d'un arbre de hauteur n, et conclure car la distorsion d'un petit arbre est minorée par 1.

On utilisera le lemme suivant :

Lemme 3.3.11. *Supposons que E est p-uniformément convexe. Soit $A = \{a_0, a_1, a_2, a_2'\}$ un arbre avec une racine, un noeud interne et deux feuilles. Si $\varphi : A \longrightarrow E$ vérifie*

$$d(e,f) \leqslant ||\varphi(e) - \varphi(f)|| \leqslant Ld(e,f) \quad \forall e,f \in A$$

alors soit

$$||\varphi(a_0) - \varphi(a_2)|| \leqslant 2\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right),$$

soit

$$||\varphi(a_0) - \varphi(a_2)|| \leqslant 2\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right)$$

où la constante K ne dépend que de l'espace E.

Preuve du Théorème 3.3.9. Soit $L = L_n > 0$ tel qu'il existe $\varphi : T_n \longrightarrow X$ avec

$$d(e,e') \leqslant d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant Ld(e,e').$$

On va construire un plongement de l'arbre de hauteur $n/2$. Pour tout noeud interne, on nomme arbitrairement un des enfants le fils, et l'autre la fille. On sélectionne ensuite deux petits-enfants de la racne, en identifiant le petit-enfant le plus proche de la racine via le fils, et le petit-enfant le plus proche de la racine via la fille (en cas d'égalité, on choisit arbitrairement). On répète ensuite cette opération avec les deux petits-enfants choisi, jusqu'à la génération $n-2$. Ceci nous sélectionne un arbre de hauteur $\lfloor n/2 \rfloor$, et leurs images en donne un plongement. De plus, comme on a systématiquement choisi le petit-enfant le plus proche parmis les deux choix possible,s d'après le lemme si f est un enfant de e dans le nouvel arbre, on a

$$2d(e,f) \leqslant d(\varphi(e), \varphi(f)) \leqslant 2\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right).$$

Donc la distorsion de $T_{\lfloor n/2 \rfloor}$ est majorée par $\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right)$. En itérant $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ fois cette construction, on a un plongement de T_1 dont la distorsion est d'au plus

$$L - \lfloor \log_2(n) \rfloor \frac{K}{L^{p-1}}.$$

Mais comme la distorsion est toujours plus grande que 1, on obtient $L^p \geqslant c(p,K)\log_2(n)$ pour n assez grand.

□

Preuve du Lemme 3.3.11. Sans perdre de généralité, on peut supposer $\varphi(a_0) = 0$. On notera x_1 (resp. x_2, x_2') pour $\varphi(a_1)$ (resp. $\varphi(a_2)$, $\varphi(a_2')$). Supposons que $||x_2|| \geqslant 2(L-\eta)$, où $\eta > 0$ sera choisi plus tard. Par inégalité triangulaire, comme $||x_1||$ et $||x_2 - x_1||$ sont majorés par L, elles sont toutes les deux minorées par $L - 2\eta$. Soit

$$v := \frac{||x_1||}{||x_2 - x_1||}(x_2 - x_1),$$

alors

$$||x_1 + v - x_2|| = \left|\left|(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{||x_1||}{||x_2 - x_1||}\right)\right|\right| = \big|||x_1|| - ||x_2 - x_1||\big| \leqslant 2\eta$$

et

$$||x_1 + v|| \geqslant ||x_2|| - ||x_1 + v - x_2|| \geqslant 2L - 4\eta.$$

Les vecteurs $x_1/||x_1||$ et $v/||x_1||$ sont de normes 1, et leur moyenne a une norme minorée par $1 - 2\eta/D$. Par hypothèse de p-uniforme convexité, on a alors

$$||x_1 - v|| \leqslant ||x_1|| \left(1 - \left(\frac{2\eta}{cL}\right)^{1/p}\right) \leqslant \varepsilon L$$

où $\varepsilon = (2\eta/(cL))^{1/p}$. En conséquence,

$$||2x_1 - x_2|| \leqslant ||x_1 + v - x_2|| + ||x_1 - v|| \leqslant 2\eta + \varepsilon D.$$

Si on fait la même hypothèse que $||x_2'|| \geqslant 2(L-\eta)$, on a alors aussi $||x_2' - 2x_1|| \leqslant 2\eta + \varepsilon D$, et donc

$$||x_2 - x_2'|| \leqslant 4\eta + 2D\left(\frac{2\eta}{cL}\right)^{1/p}.$$

En prenant $\eta = K/D^{p-1}$ avec K suffisamment petit pour que la borne ci-dessus soit strictement inférieure à 2, on aboutit à une contradiction avec $||x_2 - x_2'|| \geqslant 2$, ce qui conclut la preuve. □

Pour finir, mentionnons un plongement explicite de l'arbre binaire infini T_∞ dans ℓ^1. Comme T_∞ est dénombrable, on peut considérer une bijection ψ entre ses sommets et $\mathbb{N}$, et on peut identifier un élément k de $\mathbb{N}$ avec la suite dont seul le k-ième élément est non-nul, et vaut 1. On considère alors $\varphi(e) = \sum_{f \leqslant e} \psi(f)$, où l'ordre est celui de l'arbre (i.e. $f \leqslant e$ si f est un ancêtre de e). On vérifie aisément que

$$||\varphi(e) - \varphi(e')||_1 = d(e, e')$$

et donc on a bien un plongement isométrique.

Un exmeple d'espace réflexif mais pas super-réflexif est $\left(\bigotimes_{1 \leqslant n < \infty} \ell_1^n\right)$ muni de la norme $||(x_n)_n|| = \sqrt{\sum ||x_n||^2_{\ell_1^n}}$, restreint au sous-espace vectoriel pour lequel cette norme est finie.

3.4 Le cas des espaces L^p

Dans cette section, $(\mathcal{X}, \mu)$ sera un espace abstrait muni d'une mesure positive. L'espace L^p est l'ensemble des fonctions mesurables, dont la puissance p-ième est intégrable, et quotienté par la relation d'équivalence "'être égales μ-presque partout"'. On le munit de la norme la norme $||f||_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Pour $p = \infty$, $||f||_\infty := \inf\{C > 0;\ \ \mu(|f| > C) = 0\}$.

Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, on utilisera le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue, et $p \in [1, +\infty)$. L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Proof. Soit E l'ensemble des combinaisons l'inéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'indicatrices de pavés $\prod]x_i, y_i[$ avec les x_i et y_i rationnels. Par construction, E est dénombrable, et on va montrer qu'il est dense. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions continues à support compact, il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $||f - g||_p < \varepsilon$. En consdiérant ω un ouvert borné contenant le support de g, et en utilisant l'uniforme continuité de g, on peut construire $h \in E$ telle que $||g - h||_\infty \leqslant \varepsilon/(|\omega|^{1/p})$ et $\mathrm{supp}(h) \subset \omega$. On en déduit que $||f - h||_p \leqslant 2\varepsilon$, ce qui conclut la preuve. □

En revanche, $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable : les indicatrices de boules ouvertes centrées en les points $x \in \Omega$ (avec un rayon choisi pour que ces boules soient incluses dans Ω) forment une famille indénombrable dont les éléments sont toujours à distance 1, ce qui ne peut pas se produire dans un espace métrique séparable.

3.4.1 Dualité pour les espaces L^p

Théorème 3.4.2. *Les espaces $L^p(\mathcal{X}, \mu)$ sont réflexifs pour $1 < p < \infty$, et leur dual est isométrique à $L^{p'}(\mathcal{X}, \mu)$ via l'application*

$$f \in L^{p'}(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \left(g \in L^p(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \int fg d\mu\right).$$

On a immédiatement comme corollaire :

Théorème 3.4.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $1 < p < \infty$, toute suite bornée de $L^p(\Omega)$ admet une sous-suite qui converge faiblement.*

La réflexivité est une conséquence des lemmes suivants

Lemme 3.4.4 (Inégalité de Clarkson)**.** *Soit $2 \leqslant p < \infty$. Pour tout $f, g \in L^p$ on a*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(||f||_p^p + ||g||_p^p).$$

Pour $p = 2$, c'est en fait une égalité, qui correpsond à l'identité du parallélogramme.

La réflexivité de L^p pour $p \geqslant 2$ suit immédiatement :

Corollaire 3.4.5. *L'espace L^p est p-uniformément convexe lorsque $2 \leqslant p < \infty$.*

Proof. Si $||f||_p$ et $||g||_p$ sont majorés par 1 et $||f - g||_p \geqslant \varepsilon$, alors en appliquant l'inégalité de Clarkson on a

$$1 - \left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right| \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p} \geqslant c(p)\varepsilon^p.$$

□

Preuve de l'inégalité de Clarkson. Comme $t \longrightarrow (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$t^p + 1 \leqslant (t^2+1)^{p/2} \ \ \forall t \geqslant 0.$$

En remplaçant t par t/s et en multipliant par s^p, on a alors

$$t^p + s^p \leqslant (t^2+s^2)^{p/2} \ \ \forall s, t \geqslant 0.$$

En remplaçant t par $|f+g|/2$ et s par $|f-g|/2$, puis en utilisant la convexité de $t \longrightarrow t^{p/2}$ lorsque $t \geqslant 2$, on obtient

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leqslant \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2}\right)^{p/2} \leqslant \frac{f^p}{2} + \frac{g^p}{2}.$$

et il suffit d'intégrer contre μ pour conclure. □

Le cas $1 < p < 2$ est plus difficile, et vient comme conséquence de l'inégalité suivante :

Lemme 3.4.6 (Inégalité de Hanner)**.** *Soit $1 < p \leqslant 2$. Pour tout $f, g \in L^p$ on a*

$$\big(||f||_p + ||g||_p\big)^p + \big|||f||_p - ||g||_p\big|^p \leqslant ||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p.$$

Proof. Pour $r \in [0,1]$, soit

$$\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \text{ et } \beta(r) = \frac{(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}}{r^{p-1}}.$$

Nous allons commencer par montrer que pour tout $s, t \in R$ et $r \in [0,1]$ on a

$$\alpha(r)|s|^p + \beta(r)|t|^p \leqslant |s+t|^p + |s-t|^p. \tag{3.1}$$

Pour démontrer cette inégalité, on peut supposer sans perdre de généralité que $s, t > 0$. De plus, comme $\alpha - \beta$ est décroissante et que $\alpha(1) = \beta(1)$, on a $\alpha \geqslant \beta$ sur $[0, 1]$, et donc il suffit de dḿeontrer l'inégalité pour $s > t$. En divisant par s^p, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout $R \in [0, 1]$, la fonction $f(r) := \alpha(r) + R^p\beta(r)$ atteint son maximum en $r = R$. En calculant f', on voit qu'elle ne s'annulle que pour $r = R$. De plus, $f'(1) \leqslant 0$ et $f'(0^+) > 0$, donc le maximum est en $r = R$.

Déontrons maintenant l'inégalité de Hanner. Soit $f, g \in L^p$. Sans perdre de généralité on peut supposer $r = ||g||_p/||f||_p \leqslant 1$. D'après (3.1) on a

$$\alpha(r)|f|^p + \beta(r)|g|^p \leqslant |f + g|^p + |f - g|^p.$$

En intégrant et en utilisant les expressions explicites de α et β, on a

$$(||f||_p+||g||_p)^{p-1}||f||_p+(||f||_p-||g||_p)^{p-1}||f||_p+||g||_p(||f||_p+||g||_p)^{p-1}-||g||_p(||f||_p-||g||_p)^{p-1}$$
$$\leqslant ||f + g||_p^p + ||f - g||_p^p,$$

et on simplifie pour conclure.

□

Corollaire 3.4.7. *Soit* $1 < p < 2$. *On a pour tout* $f, g \in L^p$

$$||f + g||_p^2 + (p - 1)||f - g||_p^2 \leqslant 2(||f||_p^2 + ||g||_p^2).$$

En particulier, les espaces L^p *sont* 2*-uniformément convexes lorsque* $1 < p \leqslant 2$.

Proof. On va utiliser l'inégalité suivante (appelée inégalité à deux points de Beckner): si $1 < p < 2$ on a

$$|s^2 + (p - 1)t^2|^{1/2} \leqslant \left(\frac{|s + t|^p + |s - t|^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Une fois cette inégalité démontrée, on a

$$\begin{aligned}
||f + g||_p^2 + (p - 1)||f - g||_p^2 &\leqslant \left(\frac{|||f + g||_p + ||f - g||_p|^p + |||f + g||_p - ||f - g||_p|^p}{2}\right)^{2/p} \\
&\leqslant \left(\frac{||f||_p^p + ||g||_p^p}{2}\right)^{2/p} \\
&\leqslant \frac{||f||_p^2 + ||g||_p^2}{2}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hanner (en échangeant les rôles de f et g avec $(f+g)/2$ et $(f - g)/2$, puis utilisé la convexité de $t \longrightarrow t^{2/p}$ lorsque $p \leqslant 2$. □

On peut déjà citer un autre corollaire de l'uniforme convexité, conséquence du Théorème 3.3.3 :

Corollaire 3.4.8. *Soit* $1 < p < \infty$. *Une suite* (f_n) *converge fortement vers* f *dans* L^p *ssi elle converge faiblement, et si* $||f_n||_p \longrightarrow ||f||_p$.

Passons maintenant à la preuve du théorème de Riesz:

Preuve du Théorème 3.4.2. On a déjà démontré la reflexivité, comme conséquence de l'uniforme convexité et du théorème de Milman-Pettis. De plus, d'après l'inégalité de Holder, pour tout $g \in L^q$, la forme linéaire

$$T(g) : f \longrightarrow \int fgd\mu$$

est bien continue sur L^p, et $||T(g)||_{op} \leqslant ||g||_q$. De plus, en considérant $f = g|g|^{q-2}$, on a

$$T(g)(f) = ||g||_q^q; \quad ||f||_p = \left(\int |g|^{p(q-1)}d\mu\right)^{1/p} = ||g||_q^{q/p} = ||g||_q^{q-1},$$

donc $||T(g)||_{op} = ||g||_q$, et T est une isométrie. Il nous reste à montrer que T est surjective.

Pour cela, on va montrer que $T(L^q)$ est dense dans $(L^p)^*$. Comme $T(L^q)$ est fermé (car T est une isométrie), si ce n'était pas le cas, il existerait une forme linéaire sur $(L^p)^*$ non-nulle, mais nulle sur $T(L^q)$. Soit $h \in (L^p)^{**}$ une formelinéaire nulle sur $T(L^q)$. Comme L^p est réflexif, il existe alors $f \in L^p$ telle que $h(u) = u(f)$ pour tout $u \in (L^p)^*$. En particulier, on aurait

$$\int fgd\mu = 0 \quad \forall g \in L^q.$$

En prenant alors $g = |f|^{p-2}f \in L^q$, on obtient $||f||_p = 0$, et donc h est la forme linéaire nulle. Donc $T(L^q)$ est dense dans $(L^p)^*$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.4.9. *Si $(\mathcal{X}, \mu)$ est σ-fini, alors l'application*

$$f \in L^\infty(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \left(g \in L^1(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \int fgd\mu\right)$$

est une isométrie entre $(L^1)^*$ et L^∞.

En revanche, L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs en général.

Remarque 3.4.1. *La description du dual de L^∞ ne semble pas admettre de réponse générale, car elle dépend du système d'axiome, même dans des cas concrets. Si on utilise l'axiome du choix, il existe des formes linéaires continues sur L^∞ qui ne sont pas décrites par des mesures, donc a fortiori par des éléments de L^1. Mais sans l'axiome du choix, déterminer si $(L^\infty(\mathbb{R}^n))^*$ est strictement plus grand que $L^1(\mathbb{R}^n)$ est un problème indécidable. TROUVER REF.*

Comme corollaire (et en utilisant le théorème TO REF), on a

Théorème 3.4.10. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. De toute suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible-*.*

Pour démontrer ce théorème de représentation des formes linéaires sur L^1, on s'appuiera sur le théorème de Radon-Nikodym, vu dans le cours d'intégration au premier semestre :

Théorème 3.4.11. *Soit μ une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, et soit ν une mesure signée σ-finie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Il existe un unique couple de mesures positives σ-finies telles que $\nu = \nu_1 + \nu_2$, ν_1 soit absolument continue par rapport à μ, et ν_2 soit étrangère à μ.*

De plus, il existe une unique fonction mesurable $f \in L^1(\mu)$ telle que $\nu_1 = f\mu$.

Preuve du Théorème 3.4.9. Tout d'abord, montrons que l'application

$$T : f \in L^\infty(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \left(g \in L^1(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \int fgd\mu \right)$$

est une isométrie. L'inégalité $||T(f)||_{op} \leqslant ||f||_\infty$ est immédiate. Inversement, quitte à remplacer f par $-f$on peut supposer $\mu(f \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit A un sous-ensemble de $\{f \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon\}$ tel que $\mu(A) < \infty$ et $g = \mathbb{1}_A$. On a $T(f)(g) \geqslant (||f||_\infty - \varepsilon)\mu(A) = (||f||_\infty - \varepsilon)||g||_1$, donc $||T(f)||_{op} \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc on a bien que T est une isométrie de L^∞ vers son image.

Il nous reste maintenant à montrer la surjectivité vers $(L^1)^*$. Commençons par le cas où μ est finie. Nous allons d'abord montrer que une forme linéaire continue sur L^1 peut être représentée par une mesure, puis utiliser le théorème de Radon-Nikodym pour la représenter par une fonction L^∞.

Soit $h \in (L^1)^*$. Posons $\nu(A) = h(\mathbb{1}_A)$, et montrons que ν est une mesure signée. Tout d'abord, $\nu(\varnothing) = h(\mathbb{1}_\varnothing) = h(0) = 0$. De plus, $|\nu(A)| = |h(\mathbb{1}_A)| < \infty$ pour tout ensemble mesurable A, donc ν est une mesure finie. Ensuite, si les A_i sont deux à deux disjoints, on a

$$\nu\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = h\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n h(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i).$$

Comme $\sum_1^n \mathbb{1}_{A_i}$ converge dans $L^1(\mu)$ vers $\sum_1^\infty \mathbb{1}_{A_i}$ et que h est continue, on peut passer à la limite et obtenir

$$\nu\left(\cup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i).$$

Donc ν est bien une mesure signée.

Ensuite, comme si $\mu(A) = 0$, $\mathbb{1}_A = 0$ dans $L^1(\mu)$, et donc $\nu(A) = 0$. Donc ν est absolument continue par rapport à μ, et par application du théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction mesurable $f \in L^1(\mu)$ telle que $\nu = f\mu$. De plus, par linéarité et approximation avec des fonctions simples (qui sont denses dans L^1), pour tout $g \in L^1(\mu)$ on a $h(g) = \int gfd\mu$.

Il nous reste à montrer que $f \in L^\infty$. Supposons que $f \notin L^\infty$. Quitte à remplacer f par $-f$ (ce qui revient à remplacer h par $-h$), pour tout $R > 0$ on a $\mu(\{f \geqslant R\}) > 0$. En prenant $g_R = \mathbb{1}_{\{f \geqslant R\}}$, on a

$$|h(g_R)| \geqslant R\mu(\{f \geqslant R\}) = R||g_R||_{L^1(\mu)}.$$

Donc $||h||_{op} \geqslant R$ pour tout $R > 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $h \in (L^1)^*$. Donc $f \in L^\infty$, et de plus $||f||_\infty \leqslant ||h||_{op}$.

Passons maintenant au cas où μ est seulement σ-finie. Il existe des ensembles mesurables B_i deux à deux disjoints tels que $\mu(B_i) < \infty$ et $\cup B_i = \mathcal{X}$. Si on applique le cas des mesures finies aux espaces $(B_i, \mathcal{A}_i)$ avec $\mathcal{A}_i = \{A \cap B_i;\ A \in \mathcal{A}\}$ on a l'existence de fonctions mesurables f_i telles que pour tout i f_i est supportée sur B_i avec $||f_i||_{L^\infty(\mu)} \leqslant ||h||_{op}$, et telles que si g_i est supportée sur B_i alors $h(g) = \int f_i g d\mu$. On pose alors $f = \sum_i f_i$, qui est toujours L^∞ car les B_i sont deux à deux disjoints, et par linéarité

$$h\left(\sum_{i \leqslant n} g\mathbb{1}_{B_i}\right) = \int fg\mathbb{1}_{\cup_{i \leqslant N} B_i} d\mu.$$

On peut ensuite faire tendre N vers l'infini, en utilisant la convergence de $g\mathbb{1}_{\cup_{i\leqslant N}B_i}$ dans L^1, pour obtenir

$$h(g) = \int fgd\mu.$$

□

On termine cette section par un théorème d'interpolation, qui sera utilisé plus tard pour étudier la transformée de Fourier.

Théorème 3.4.12 (Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin)**.** *Soit $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1, +\infty]$ et $t \in [0, 1]$.Soit μ et ν deux mesures σ-finies sur deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (qui peuvent être différents). On pose*

$$\frac{1}{p_t} := \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}; \quad \frac{1}{r_t} := \frac{1-t}{r_0} + \frac{t}{r_1}.$$

Soit T un opérateur linéaire de $L^{p_0}(\mu, \mathbb{C}) + L^{p_1}(\mu, \mathbb{C})$ vers $L^{r_0}(\nu, \mathbb{C}) + L^{r_1}(\nu, \mathbb{C})$ (i.e. sur les fonctions à valeurs complexes), continu de L^{p_0} vers L^{r_0} avec norme M_0, et continu de L^{p_1} vers L^{r_1} avec norme M_1. Alors T est un opérateur continu de $L^{p_t}(\mu)$ vers $L^{r_t}(\nu)$, de norme inférieure à $M_0^{1-t}M_1^t$.

En d'autres termes, la fonction qui à $(s, t) \in [0, 1]^2$ associe la norme d'un opérateur donné de $L^{1/s}$ vers $L^{1/t}$ est log-convexe. Si on travaille avec un opérateur sur les fonctions à valeurs réelles, on peut trivialement l'étendre à un opérateur sur les fonctions à valeurs complexes, mais la comparaison des normes opérateur fait apparaître un facteur 2 en plus.

Corollaire 3.4.13 (Inégalité de Young pour la convolution)**.** *Soient p, r, s tels que $p^{-1} + r^{-1} = 1 + s^{-1}$, et soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors leur convolution vérifie*

$$||f * g||_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant ||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)}||g||_{L^r(\mathbb{R}^d)}.$$

Antrement dit, l'opérateur de convolution avec une fonction L^p est continue de L^r vers L^s.

Proof. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Il est immédiat que l'opérateur

$$T : g \longrightarrow f * g := \int f(y)g(\cdot - y)dy$$

vérifie

$$||Tg||_1 \leqslant ||f||_1||g||_1; \quad ||Tg||_\infty \leqslant ||f||_1||g||_\infty.$$

Donc T est continu de L^1 dans L^1 et L^∞ dans L^∞, à chaque fois avec norme $||f||_1$. Par application du théorème de Riesz-Thorin, on a alors

$$||Tg||_p \leqslant ||f||_1||g||_p.$$

Mais en échangeant les rôles de f et g, on voit alors que si $f \in L^p$, T est continue de L^1 dans L^p, avec norme $||f||_p$. De plus, toujours si $f \in L^p$, une application de l'inégalité de Holder montre que T est continue de L^q dans L^∞, avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$, avec norme $||f||_p$. Une nouvelle application du théorème de Riesz-Thorin donne alors que T est continu de L^r dans L^s (avec les valeurs données dans l'énoncé), avec norme $||f||_p$, ce qui conclut la preuve. □

La preuve du théorème de Riesz-Thorin utilisera le résultat suivant :

Théorème 3.4.14 (Théorème des trois droites de Hadamard)**.** *Soit φ une fonction à valeurs complexes, analytique et bornéesur la bande $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leqslant \Re(z) \leqslant 1\}$, et soit*

$$N(a) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(a+it)|.$$

Alors

$$N(a) \leqslant N(0)^(1-a)N(1)^a.$$

Proof. Soit $c = \log(N(0)/N(1))$ et $\psi(z) = e^{cz}\varphi(z)$. Cette fonction est analytique bornée sur la bande, et son module est majoré par $N(0)$ sur les deux droites $\Re(z) = 0$ et $\Re(z) = 1$. Donc par le principe du maximum, son module est majoré par $N(0)$ sur toute la bande. D'où

$$|\varphi(a+it)| \leqslant N(0)e^{-ca} = N(0)^{1-a}N(1)^a,$$

ce qui conclut la preuve. □

Preuve du théorème de Riesz-Thorin. Pour cette preuve, étant donné $p \in [1, +\infty]$, on notera p^* l'exposant dual défini par $p^{-1} + (p^*)^{-1} = 1$. Soit

$$M(p,r) := ||T||_{op,L^p\to L^r} = \sup_{||f||_p=||g||_{r^*}=1} \int T(f)gd\mu$$

où f et g sont à valeurs complexes. On a les inclusions

$$L^{p_0} \cap L^{p_1} \subset L^{p_\theta} \subset L^{p_0} + L^{p_1}.$$

La première inclusion est une conséquence de la log-convexité des normes L^p

$$||f||_{p_t} \leqslant ||f||_{p_0}^{1-t}||f||_{p_1}^t$$

obtenue en appliquant l'inégalité de Hölder à $|f|^{p_t} = |f|^{p_t(1-t)}|f|^{p_t t}$. La seconde inclusion s'obtient en observant que si $f \in L^{p_t}$ alors $f\mathbb{1}_{|f|>1} \in L^{p_0}$ et $f\mathbb{1}_{|f|\leqslant 1} \in L^{p_1}$. En particulier, on peut définir T sur L^{p_θ} par linéarité. De plus comme les fonctions simples sont denses, $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ est dense dans L^{p_t}.

Notre but est de montrer que

$$||f||_{p_t} = ||g||_{r_t^*} = 1 \Rightarrow \int T(f)gd\nu \leqslant M(p_0,r_0)^{1-t}M(p_1,r_1)^t.$$

On commence par considérer le cas où f et g sont simples (et donc dans $L^{p_0} \cap L^{p_1}$) et $||f||_{p_t} = ||g||_{r_t^*} = 1$. On peut les réecrire

$$f = |f|e^{i\alpha}; \quad g = |g|e^{i\beta}.$$

On définit $u(z)$ et $v(z)$ sur la bande $\{\mathrm{Re}(z) \in [0,1]\}$ via

$$\frac{1}{u(z)} := \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}; \quad \frac{1}{v(z)} := \frac{1-z}{r_0} + \frac{z}{r_1}$$

et on définit

$$f_z := |f|^{u(z)}u(t)e^{i\alpha}; \quad g = |g|^{1-v(z)}1 - v(t)e^{i\beta}.$$

On va supposer pour simplifier les notations que on a exclu le cas $r_0 = r_1 = 1$. Si on est dans ce dernier cas, on prend g indépendant de z, et ce qui suit s'adapte. On pose ensuite

$$\Phi(z) := \int (Tf_z)g_z d\nu; \quad z \in \{0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$$

qui est une fonction analytique (comme f et g sont simples, il suffit de les écrire comme des sommes d'indicatrices de domaines disjoints, et de développer la somme pour le voir). Il nous suffit maintenant de montrer que

$$|\Phi(is)| \leqslant M(p_0, r_0); \quad |\Phi(1+is)| \leqslant M(p_1, r_1) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

et le conclusion suit via le théorème des trois droites et (avec un peu de travail) la densité des fonctions simples car $M(p_t, r_t)$ s'obtient en maximisant $\Phi(t)$ sur les fonctions f et g possibles. On a

$$|f_{is}| = |f|^{p_t/p_0} \text{ et donc } ||f_{is}||_{p_0} \leqslant ||f||_{p_t}^{p_t/p_0} = 1.$$

De même, on a $||g_{is}||_{r_0^*} \leqslant ||g||_{r_t^*}^{r_t^*/r_0^*} = 1$. L'inégalité de Hölder avec exposants r_0 et r_0^* donne

$$|\Phi(is)| \leqslant ||Tf_{is}||_{r_0} ||g_{is}||_{r_0^*} \leqslant M(p_0, r_0)||f_{is}||_{r_0}||g_{is}||_{r_0^*} \leqslant M(p_0, r_0).$$

Un raisonnement analogue donne $|\Phi(1+is)| \leqslant M(p_1, r_1)$.

A FAIRE : DETAILLER L'ARGUMENT DE DENSITE □

3.4.2 Compléments sur la compacité dans les espaces L^p

Pour le début de cette section, on ne considèrera que les espaces $L^p(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue.

Notation. *Si Ω est un ouvert, on notera $A \subset\subset \Omega$ pour dire que A est un ouvert tel que $\bar{A}$ est inclus dans Ω.*

Notation. *On notera τ_h l'opérateur linéaire qui a une fonction f associe la fonction $x \longrightarrow f(x+h)$.*

Théorème 3.4.15 (Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\Omega)$. Si*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A \subset\subset \Omega$ il existe $0 < \delta < d(A, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)$ tel que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||\tau_h f - f||_{L^p(A)} \leqslant \varepsilon \quad \forall h \ t.q. \ |h| \leqslant \delta;$$

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \subset\subset \Omega$ tel que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} ||f||_{L^p(\Omega \backslash A)} \leqslant \varepsilon;$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ (pour la topologie forte).

Proof. Comme $L^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. Le but est de montrer qu'on peut recouvrir $\mathcal{F}$ avec un nombre fini de boules de rayon ε de $L^p(\Omega)$.

Soit $A \subset\subset \Omega$ tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{L^p(\Omega\backslash A)} = \sup_{f\in\mathcal{F}} ||f - \mathbb{1}_A f||_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < d(A, \mathbb{R}^d\backslash\Omega)$ et

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||\tau_h f - f||_{L^p(A)} \leqslant \varepsilon/3 \ \ \forall h \text{ t.q. } |h| \leqslant \alpha.$$

Soit ρ_α une fonction C^∞, positive, à support inclus dans la boule de rayon α et telle que $\int \rho dx = 1$. Soit

$$\mathcal{F}_{\alpha,A} := \{\rho_\alpha * f|_A; \ \ f \in \mathcal{F}\}$$

l'ensemble des convolutions d'éléments de $\mathcal{F}$ avec ρ_α. On a

$$|\rho_\alpha * f(x) - f(x)| \leqslant \int_{\{|h|\leqslant\alpha\}} \rho_\alpha(h)|\tau_{-h}f(x) - f(x)|dh.$$

En appliquan l'inégalité de Jensen,

$$|\rho_\alpha * f(x) - f(x)|^p \leqslant \int_{\{|h|\leqslant\alpha\}} \rho_\alpha(h)|\tau_{-h}f(x) - f(x)|^p dh,$$

et donc

$$||\rho_\alpha f - f||^p_{L^p(A)} \leqslant \int_{\{|h|\leqslant\alpha\}} \rho_\alpha(h)||\tau_{-h}f - f||^p_{L^p(A)}dh \leqslant (\varepsilon/3)^p,$$

et donc

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||\rho_\alpha * f - f||_{L^p(A)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité de Holder

$$||\rho_\alpha * f||_{L^\infty(A)} \leqslant ||\rho_\alpha||_{L^q(A)}||f||_{L^p(A)}; \quad ||\nabla(\rho_\alpha * f)||_{L^\infty(A)} \leqslant ||\nabla\rho_\alpha||_{L^q(A)}||f||_{L^p(A)},$$

où $p^{-1} + q^{-1} = 1$. En particulier, $\mathcal{F}_{n,A}$ est uniformément bornée et uniformément équilipschitzienne, donc apr théorème d'Arzela-Ascoli elle est relativement compacte dans $C_c(A)$, et donc dans $L^p(A)$. Il existe donc une famille finie $g_1 \cdot g_N$ d'éléments de $L^p(A)$ (qu'on prolonge par 0 en dehors de A) tels que

$$\mathcal{F}_{n,A} \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant N} B_{L^p(\Omega)}(g_i, \varepsilon/3).$$

Mais comme

$$||f - \mathbb{1}_A\rho_\alpha * f||_{L^p(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^p(\Omega\backslash A)} + ||f - \rho_\alpha * f||_{L^p(A)} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3},$$

on en déduit que

$$\mathcal{F} \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant N} B_{L^p(\Omega)}(g_i, \varepsilon),$$

ce qui conclut la preuve. □

Un autre point de vue, dont on discutera plus rigoureusement plus tard, est détudier les obstructions à la convergence forte lorsqu'on a convergence faible. Si on regarde le cas $L^2(\mathbb{R}^d)$, il s'avère qu'il y a essentiellement quatre obstructions possibles :

-les translations : si f est une fonction L^2, $\tau_h f$ converge faiblement vers la fonction nulle lorsque h tend vers l'infini, mais la norme L^2 reste constante.

-l'évanescence : $x \longrightarrow \lambda^{-d/2} f(x/\lambda)$ a une norme L^2 constante, mais s'étale à l'infini et converge faiblement vers 0 si $\lambda \longrightarrow \infty$.

-la concentration : on reprend le même exemple que précdemment, mais on fait tendre λ vers 0^+. La masse reste constante, mais se concentre dans une région de plus en plus petite. Il faudrait renormaliser par λ^{-d} plutôt que $\lambda^{-d/2}$ pour avoir convergence vers une masse de Dirac (quand f est continue à support compact), donc avec cette normalisation on a convergence faible vers 0.

-les oscillations : $x \longrightarrow e^{iy \cdot x} f(x)$ converge faiblement vers 0 (lemme de Riemann-Lebesgue), mais pas dans L^2 (et on peut prendre les parties réelles et imaginaires pour avoir des fonctions à valeurs réelles).

On peut utiliser ces exemples pour montrer que les hypothèses du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sont aussi nécessaires.

Bien sûr on peut avoir des combinaisons de ces différentes situations. La philosophie générale pur ce type de résultats (y compris dans d'autres espaces de fonctions) est appelée concentration-compacité. Elle apparaît sous différente forme, et on pourra consulter TO REF. On verra plus tard des énoncés rigoureux de ce type.

A noter que chacun de ces cas peut être vu comme résultant d'une action d'un groupe non compact sur L^2 qui préserve la norme.

Pour le cas L^1, l'espace n'est pas réflexif, mais on a un critère de compacité faible. On se place maintenant de nouveau dans le cadre d'un espace mesuré abstrait muni d'une mesure positive *finie.*

Définition 3.4.16 (Uniforme intégrabilité)**.** *Une famille $\mathcal{F}$ bornée dans $L^1(\Omega)$ est dite uniformément intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall A \subset \Omega \text{ mesurable, } |A| \leqslant \delta \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 3.4.17 (Théorème de Dunford-Pettis)**.** *Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ un espace abstrait muni d'une tribu et d'une mesure positive finie. Une famille bornée dans $L^1(\mu)$ est uniformément intégrable si et seulement si elle est faiblement séquentiellement relativement compacte dans $L^1(\Omega)$.*

L'uniforme intégrabilité (pour des familles de variables aléatoires) est une notion très utilisée en probabilités, pour prouver des convergences L^1 de variables aléatoires. Il en sera notamment question dans le cours de processus stochastiques de deuxième année. Nous n'allons démontrer ici que le sens direct. A FAIRE : REF SENS RECIPROQUE

On notera dorénavent UI pour uniformément intégrable.

Proof. Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée et uniformément intégrable de $L^1(\mu)$. On vérifie tout d'abord que si une famille est UI, alors leurs parties positives et négatives le sont aussi. Donc on peut sans perdre de généralité considérer le cas où les éléments de $\mathcal{F}$ sont positifs.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de $\mathcal{F}$. Posons $f_n^k := f_n \mathbb{1}_{\{f_n \leqslant k\}}$ et $M := \sup_n \int f_n$. On a

$$M \geqslant \sup_n \int_{\{f_n > k\}} f_n \geqslant \sup_n k|\{f_n > k\}|$$

donc $\sup_n |\{f_n > k\}| \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow \infty$. En conséquence, comme la suite est UI, on a

$$\lim_k \sup_n \int_{\{f_n > k\}} f_n = 0.$$

Posons $\delta_k = \sup_n \int_{\{f_n > k\}} = \sup_n ||f_n - f_n^k||_1$ (qui tend donc vers 0).

Comme $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞, on peut extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible-*. Mais comme μ est finie, $L^\infty(\mu) \subset L^1(\mu)$, et cette sous-suite converge aussi faiblement dans L^1 (via l'identification de $(L^1)^*$ et L^∞).

Pour tout k, on a donc une extraction φ_k telle que $f^k_{\varphi_k(n)}$ converge faiblement dans L^1 vers une fonction f^k, et par extraction successive on peut imposer que $f^\ell_{\varphi_k(n)}$ converge vers f^ℓ pour tout $\ell \leqslant k$.

Comme $f^\ell_{\varphi_k(n)} \leqslant f^{\ell+1}_{\varphi_k(n)}$ si $\ell \leqslant k-1$, on voit que f^k est croissante. De plus

$$\sup_k \int f^k \leqslant \sup_k \liminf \int f^k_{\varphi_k(n)} \leqslant \sup_n \int f_n.$$

Par le théorème de convergence monotone de Beppo-Lévy, f^k converge p.p. et dans L^1 vers $f = \sup_k f^k$.

Nous allons montrer que, pour $\varphi(n) = \varphi_n(n)$ (extraction diagonale), on a la convergence faible dans L^1 de $f_{\varphi(n)}$ vers f. Soit $g \in L^\infty$ et $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 suffisamment grand pour que

$$||g||_\infty(\delta_{k_0} + ||f^{k_0} - f||_{L^1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|\int g(f_{\varphi(n)} - f)\right| &\leqslant \left|\int g(f_{\varphi(n)} - f^{k_0}_{\varphi(n)} + f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0} + f^{k_0} - f)\right| \\
&\leqslant ||g||_\infty(||f_{\varphi(n)} - f^{k_0}_{\varphi(n)}||_1 + ||f^{k_0} - f||_1) + \left|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\right| \\
&\leqslant ||g||_\infty(\delta_{k_0} + ||f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0}||_1) + \left|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\right|.
\end{aligned}$$

Comme $f^{k_0}_{\varphi(n)}$ converge faiblement dans L^1 vers f^{k_0}, le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc pour n assez grand

$$\left|\int g(f_{\varphi(n)} - f)\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

Chapter 4

Espaces de mesures

Dans ce chapitre, on verra des applications de la topologie faible-* à la topologie des epsaces de mesures, via les applications

$$f \longrightarrow \int f d\mu$$

qui, étant donné une mesure borelienne finie μ, donne une forme linéaire sur un espace de fonctions.

Dans ce chapitre (et les autres) on utilisera la convention française : un espace compact est toujours supposé séparé.

4.1 Quelques rappels sur la convergence de mesures

Définition 4.1.1. *Une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures de probabilités sur un espace polonais converge étroitement vers la mesure de probabilité μ si pour toute fonction continue bornée f on a*

$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu.$$

La proposition suivante est souvent utile pour limiter la classe de fonctions à utiliser pour vérifier la convergence :

Proposition 4.1.2. *On suppose (E, d) est un espace polonais. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ;*
2. *Pour toute fonction f uniformément continue bornée, $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$;*
3. *Pour toute fonction f lispchitz et bornée, on a $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$;*
4. *Pour tout fermé F, on a $\mu(F) \geqslant \limsup \mu_n(F)$;*
5. *Pour tout ouvert O, on a $\mu(O) \leqslant \liminf \mu_n(O)$;*
6. *Pour tout borélien A avec $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim \mu_n(A) = \mu(A)$;*
7. *Pour toute fonction f mesurable, continue μ-presque partout et bornée, on a $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$.*

Proof. Les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ et $7 \Rightarrow 1$, et l'équivalence $4 \Leftrightarrow 5$, sont immédiates.

Pour montrer que $3 \Rightarrow 4$, pour F un ensemble fermé, on introduit la fonction $f_K(x) := \max(0, 1 - Kd(x, F))$. Cette fonction est K-lipchitz et bornée, et lorsque $K \longrightarrow +\infty$, f_K converge de manière monotone vers $\mathbb{1}_F$. On a donc $\mu_n(F) \leqslant \int f_K d\mu_n$ pour tout n, et donc

$$\limsup_n \mu_n(F) \leqslant \lim_K \limsup_n \int f_K d\mu_N = \lim_K \int f_K d\mu = \mu(F)$$

où on a utilisé le théorème de convergence dominé appliquée aux fonctions $f_K \leqslant 1$. On a donc bien $3 \Rightarrow 4$.

Montrons maintenant que 4 et 5 (qui sont équivalentes) impliquent 6. Si $\mu(\partial A) = 0$, on a alors $\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\bar{A})$, et donc

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu(A^\circ) \leqslant \liminf \mu_n(A^\circ) \leqslant \liminf \mu_n(A) \leqslant \limsup \mu_n(A) \\ \leqslant \limsup \mu_n(\bar{A}) \leqslant \mu(\bar{A}) = \mu(A), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Montrons enfin que $6 \Rightarrow 7$. Soit f une fonction mesurable, bornée et continue μ-presque partout. Quitte à décomposer f en $f_+ - f_-$, on peut supposer que f est positive. Grâce au théorème de Fubini, on a

$$\int f d\mu = \int \mu(dx) \int_0^\infty \mathbb{1}_{[O, f(x)]}(y) dy = \int_0^\infty \mu(\{f \geqslant y\}dy.$$

Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Pour tout y, si $A_y = \{x; f(x) \geqslant y\}$, alors $\partial A_y \subset D \cup \{f = y\}$. En effet, si $x \in \bar{A}_y$, alors il existe une suite telle que $x_n \to x$ avec $f(x_n) > y$ pour tout n. Alors, si x n'est pas un point de discontinuité de f, et n'est pas dans A_y, on a nécessairement $f(x) = y$. On souhaite montrer que pour Lebesgue-presque tout y, on a $\mu(\partial A_y) = 0$, et pour ce il suffit de montrer que pour Lebesgue-presque tout y, on a $\mu(\{f = y\}) = 0$.

Or $\{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) > 0\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) \geqslant 1/k\}$. Or comme les $\{f = y\}$ sont deux à deux disjoints, $\{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) \geqslant 1/k\}$ est de cardinal inférieur à k. Donc $\{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) > 0\}$ est une réunion dénombrable d'ensemble finis, donc dénombrable, et donc de mesure de Lebesgue nulle.

Donc, en utilisant 6, pour Lebesgue-presque tout $y \geqslant 0$, on a $\mu_n(f \geqslant y) \longrightarrow \mu(f \geqslant y)$. Alors, par convergence dominée,

$$\int f d\mu_n = \int_0^{||f||_\infty} \mu_n(f \geqslant y) dy \longrightarrow \int_0^{||f||_\infty} \mu(f \geqslant y) dy = \int f d\mu$$

ce qui conclut la preuve.

□

Dans ce chapitre, on considérera essentiellement soit des epsaces compacts, soit des espaces localement compacts (i.e. tout point admet une base de voisinages relativement compacts) et σ-compacts, c'est à dire qui sont réunion d'une suite croissante de compacts K_n d'intérieur non vide, tels que $K_n \subset \mathrm{int}(K_{n+1})$. On appelle suite exhaustive de compacts une telle suite. En particulier, si on dispose d'une telle suite, alors pour tout compact K il existe un n tel que $K \subset K_n$. Ce cadre est assez naturel du point de vue de l'analyse, mais insuffisant pour certaines des applications en probabilités, dont le cadre naturel est plutôt celui des epsaces polonais.

On utilisera occasionnellement le lemme suivant :

Lemme 4.1.3 (Lemme d'Urysohn)**.** *Soit (X, d) un espace métrique localement compact et σ-compact, K un compact de X et V un ouvert contenant K. Alors il existe une fonction f continue à support compact telle que*

$$\mathbb{1}_K \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_V.$$

Proof. Soit O un ouvert relativement compact contenant K et inclus dans V. La fonction

$$f(x) := \frac{d(x, X \backslash O)}{d(x, K) + d(X \backslash O)}$$

convient. Pour justifier que O existe, considère une suite exhaustive de compacts (K_n), on chosiit n tel que $K \subset K_n$, et on prend $O = \mathrm{int}(K_{n+1}) \cap V$. □

Lemme 4.1.4 (Partition de l'unité)**.** *Soit (X, d) un espace métrique localement compact et σ-compact, $K \subset X$ un compact et $V_1, ..., V_n$ un recouvrement de K par des ouverts. Il existe une famille $g_1, ..., g_n$ de fonctions continues à support compact, avec $0 \leqslant g_i \leqslant 1$, $\mathrm{supp}\, g_i \subset V_i$ et*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1 \quad \forall x \in K.$$

La famille $g_1, ..., g_n$ est appelée une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_1, ..., V_n$ de K.

Proof. Tout point $x \in K$ admet un voisinage W_x d'adhérence compact inclus dans l'un des V_i (pou un i qui dépend de x). On extraie de ce recouvrement d'ouverts un reocuvrement fini, et quitte à prendre l'union de ceux qui sont inclus dans un même V_i, on trouve une famille de points $x_1, ..., x_n$ tels que $K \subset \cup W_{x_i}$ et $\bar{W}_{x_i} \subset V_i$. Grâce au lemme d'Urysohn, on a des fonctions continues f_i telles que

$$\mathbb{1}_{\bar{W}_{x_i}} \leqslant f_i \leqslant \mathbb{1}_{V_i}.$$

On prend alors

$$g_1 = f_1, \;\; g_2 = (1 - f_1) f_2 \;\; \ldots \;\; g_n = f_n \prod_1^{n-1} (1 - f_i).$$

□

4.2 Théorème de Riesz

Etant donné une mesure μ, la fonction

$$f \longrightarrow \int f d\mu$$

définit une forme linéaire continue sur $(C_b(E), || \cdot ||_\infty)$. Le but sera d'utiliser la topologie faible-* pour étudier la convergence de mesures. Pour ce faire, il nous faut étudier quel est le dual de $(C_b(\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$. Il se trouve que la situation est un peu différente selon si E est compact ou non, et qu'en général c'est le dual des fonctions continues à support compact qui est isométrique à l'espace des mesures signées finies.

Définition 4.2.1 (Mesure régulière). *Une mesure borelienne μ sur un espace métrique est régulière si pour tout borélien A on a*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O);\ \ A \subset O,\ \ O \text{ ouvert}\}$$

et

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ \ K \subset A,\ \ K \text{ compact}\}.$$

Dans le contexte de ce cours, cette notion ne sera pas mise en avant. On verra par exemple a posteriori qu'il n'y a pas de mesure borelienne finie sur un espace compact qui ne soit pas régulière. Mais dans des contextes plus généraux cette notion peut provoquer des difficultés.

4.2.1 Théorème de Riesz, cas compact

Une forme linéaire T sur un espace de fonctions à valeurs réelles est dite positive si pour toute fonction f positive on a $T(f) \geqslant 0$.

Théorème 4.2.2 (Théorème de Riesz, formes linéaires positives sur $C(K)$). *Soit (K, d) un espace métrique compact, et T une forme linéaire continue et positive sur $(C(K), ||\cdot||_\infty)$. Il existe une unique mesure borélienne μ finie et régulière telle que*

$$T(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C(K).$$

Corollaire 4.2.3. *Sur un espace métrique compact, toute mesure borélinenne finie est régulière.*

Dans le cadre compact, l'ensemble des mesures de probabilité est fermé dans $C(E, \mathbb{R})^*$, et on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.2.4 (Théorème de Prokhorov, cas des espaces compacts). *Si (E, d) est un espace compact, alors $\mathcal{P}(E)$ est compact pour la topologie de la convergence étroite.*

Corollaire 4.2.5. *Si une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est uniformément bornée (c'est à dire que il existe $M > 0$ tel que pour tout n on ait $|X_n| \leqslant M$ p.s.), alors on peut en extraire une sous-suite qui converge en loi.*

Preuve du Théorème 4.2.2. **Etape 1 : Unicité**

Soient μ et ν deux mesures boréliennes positives qui représentent une même forme linéaire T. Soit K un fermé (donc compact) et $V_n := \{x; d(x, K) < 1/n\}$. Par le lemme d'Ursohn, il existe $f_n \in C_c(E)$ telle que $\mathbb{1}_K \leqslant f_n \leqslant \mathbb{1}_{V_n}$, et donc

$$\mu(K) \leqslant T(f) \leqslant \cap_{n=1}^{\infty} \nu(V_n).$$

On a donc $\mu(K) \leqslant \nu(K)$, et par symétrie μ et ν coïncident sur les fermés. Un argument de classe monotone justifie alors qu'elles coïncident. A noter qu'on ne les a pas supposées régulières.

Etape 2 : Définition et propriétés sur les ouverts

Soit V un ouvert. On pose

$$\mu(V) := \sup\{T(f);\ \ 0 \leqslant f \leqslant 1;\ \ \mathrm{supp}(f) \subset V\}.$$

Par définition, μ est positive et monotone sur les ouverts. Nous allons montrer l'additivité sur les familles finies d'ouverts disjoints.

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts, et f telle que $\mathrm{supp}\, f \subset \cup_n V_n$ et $0 \leqslant f \leqslant 1$. Comme $\mathrm{supp}\, f$ est compact et inclus dans $\cup_n V_n$, il existe N tel que $\mathrm{supp}\, f \subset \cup_1^N V_n$. On prend alors $g_1, ..., g_N$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_1, ..., V_N$, et alors

$$T(f) = \sum_1^N T(g_n f) \leqslant \sum_1^N \mu(V_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu(V_n).$$

On en déduit alors que

$$\mu(\cup_1^\infty V_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu(V_n).$$

Soit V_1 et V_2 deux ouverts disjoints, $\varepsilon > 0$ et f_1, f_2 telles que $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, $\mathrm{supp}\, f_i \subset V_i$ et

$$T(f_i) \geqslant \mu(V_i) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $0 \leqslant f_1 + f_2 \leqslant \mathbb{1}_{V_1} + \mathbb{1}_{V_2} = \mathbb{1}_{V_1 \cup V_2}$ et donc

$$\mu(V_1 \cup V_2) \geqslant T(f_1) + T(f_2) \geqslant \mu(V_1) + \mu(V_2) - \varepsilon.$$

On en déduit en faisant tendre ε vers 0 que μ est additive sur les unions de deux ouverts, et on généralise apr récurrence aux unions finies d'ouverts.

Etape 3 : Définition et propriétés sur les compacts

Soit K un compact. On pose

$$\mu(K) := \inf\{\mu(V);\ \ V \text{ ouvert et } K \subset V\}.$$

Par définition, μ est positive et monotone sur les compacts. De plus, on vérifie aisément que si K est à al fois ouvert et fermé, la valeur coïncide avec la définition précédente. Nous allons maintenant montrer l'additivité sur les familles finies de compacts disjoints.

Soient K_1 et K_2 deux compacts, $\varepsilon > 0$ et V_1, V_2 deux ouverts tels que $K_i \subset V_i$ et $\mu(K_i) \geqslant \mu(V_i) - \varepsilon/2$. Alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(V_1 \cup V_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2) + \varepsilon.$$

Donc $\mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Supposons maintenant K_1 et K_2 disjoints. Soit V un ouvert contenant $K_1 \cup K_2$ et tel que $\mu(V) \leqslant \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. Il existe V_1 et V_2 ouverts disjoints tels que V_i contienne K_i et leur union soit contenue dans V. Alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) \geqslant \mu(V) - \varepsilon \geqslant \mu(V_1) + \mu(V_2) - \varepsilon \geqslant \mu(K_1) + \mu(K_2) - \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 on a l'additivité sur deux compacts disjoints, et par récurrence sur les familles finies de compacts disjoints.

Etape 4 : Mesure intérieure, mesure extérieure

Pour $A \subset E$ on définit

$$\mu_*(A) := \sup\{\mu(K),\ \ K \text{ compact } \subset A\};$$

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(V),\ \ K \text{ ouvert } \supset A\}.$$

On a $\mu_* \leqslant \mu^*$, et les deux sont monotones pour l'inclusion. Posons

$$\mathcal{B} := \{A; \mu_*(A) = \mu^*(A)\}.$$

Par construction $\mathcal{B}$ contient les compacts. Montrons que $\mathcal{B}$ contient les ouverts.

Par construction $\mu(V) = \mu^*(V) \geqslant \mu_*(V)$, donc il nous reste à montrer l'inégalité inverse. Soit $f \in C(E)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$ et $K := \operatorname{supp} f \subset V$. Soit W un ouvert contenant K et d'adhérence incluse dans V. Par le lemme d'Urysohn il existe $g \in C(X)$ telle que $\mathbb{1}_K \leqslant g \leqslant \mathbb{1}_W$. On a alors

$$T(f) \leqslant T(g) \leqslant \mu(W) \leqslant \mu(\bar{W}) \leqslant \mu_*(V).$$

En passant au sup sur les f, on obtient

$$\mu^*(V) = \mu(V) \leqslant \mu_*(V)$$

et donc $\mathcal{B}$ contient les ouverts.

Etape 5 : σ-additivité sur $\mathcal{B}$

Soit (A_n) une famille d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Nous allons montrer que $\cup_n A_n \in \mathcal{B}$ et que $\mu(\cup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \mu(A_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout n un compact K_n tel que $K_n \subset A_n$ et $\mu(K_n) \geqslant \mu_(A_n) - \varepsilon/2^n$. Alors

$$\mu_*\left(\cup_1^\infty A_n\right) \geqslant \mu_*\left(\cup_1^N A_n\right) \geqslant \mu_*\left(\cup_1^N K_n\right)$$

$$= \sum_1^N \mu(K_n) \geqslant \sum_1^N \mu(A_n) - \varepsilon$$

et on peut faire tendre N vers l'infini puis ε vers 0 pour avoir

$$\mu_*\left(\cup_1^\infty A_n\right) \geqslant \sum_1^\infty \mu(A_n).$$

En considérant maintenant une suites d'ouverts $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A_n \subset V_n$ et $\mu(A_n) \geqslant \mu(V_n) - \varepsilon/2^n$, on a

$$\mu^*\left(\cup_1^\infty A_n\right) \leqslant \mu\left(\cup_1^\infty V_n\right) \leqslant \sum_1^\infty \mu(V_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu(A_n) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit l'identité voulue.

Etape 6 : $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre contenant les boréliens

Avec le raisonnement précédent, on voit que

$$\mathcal{B} = \{A \subset E; \forall\varepsilon > 0 \exists K \text{ compact } \subset A \subset V \text{ ouvert et } \mu(V \backslash K) \leqslant \varepsilon\}.$$

On en déduit que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire. Comme elle est stable par union dénombrable, c'est une σ-algèbre, et comme elle contient les ouverts, elle contient aussi les boréliens. De plus, par construction la restriction de μ aux boréliens est régulière.

Etape 7 : μ représente T On veut montrer que pour toute fonction $f \in C(K)$ on a $T(f) = \int f d\mu$. Par linéarité il suffit de montrer que $T(f) \leqslant \int f d\mu$. Comme de plus $T(1) = \mu(E)$, qui tte à ajouter une cnstante à f et à la multiplier par un scalaire, on peut supposer $0 \leqslant f \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$. Pour $k \in \{0, ..., N\}$ on pose

$$A_k := \{x \in E; (k-1)\varepsilon < f(x) \leqslant k\varepsilon\}.$$

Pour tout k on peut choisir un ouvert V_k contenant A_k et tel que $\mu(V_k \backslash A_k) \leqslant \varepsilon/(N+1)$. Alors

$$\int f d\mu \geqslant \sum_{k=0}^{N} (k-1)\varepsilon\mu(A_k) \geqslant \left(\sum_k (k-1)\varepsilon\mu(V_k) \right) - \varepsilon.$$

Quitte à réduire les V_k, on peut supposer $f \leqslant (k+1)\varepsilon$ sur V_k. Soit $g_1, ...g_N$ une partition de l'unité subordonnée aux V_k. On a

$$T(f) = \sum T(fg_k) \leqslant \sum (k+1)\varepsilon T(g_k) \leqslant \sum (k+1)\varepsilon\mu(V_k).$$

En faisant tendre ε vers 0 on a bien

$$T(f) \leqslant \int f d\mu$$

ce qui conclut la preuve. □

Définition 4.2.6. *Soit (E, d) un espace métrique compact. On appelle mesure de Radon toute forme linéaire continue sur $C(E)$, et on note $\mathcal{M}(E)$ l'espace $C(E)'$ des mesures de Radon sur E, qu'on munit de la norme*

$$||T||_{\mathcal{M}(E)} := \sup\{|T(f)|;\ \ f \in C(E) \text{ et } ||f||_\infty \leqslant 1\}.$$

Pour une mesure de Radon positive, on a $||T||_{\mathcal{M}(E)} = T(1) = \mu(E)$.

Le théorème de Riesz identifie les mesures de Radon positives aux mesures positives finies. On peut étendre aux formes linéaires générales en décomposant en parties positives et négatives :

Proposition 4.2.7. *Soit (E, d) un epsace métrique compact et T une mesure de Radon sur E. On pose pour $f \geqslant 0$*

$$T_+(f) := \sup\{T(g);\ \ 0 \leqslant g \leqslant f;\ \ g \in C(E)\};$$

$$T_-(f) := -\inf\{T(g);\ \ 0 \leqslant g \leqslant f;\ \ g \in C(E)\};$$

qu'on étend aux fonctions continues générales via

$$T_+(f) = T_+(f_+) - T_+(f_-);\quad T_-(f) = T_-(f_+) - T_-(f_-).$$

Alors T_+ et T_- sont des mesures de Radon positives, et $T = T_+ - T_-$. On a

$$||T||_{\mathcal{M}(E)} = ||T_+||_{\mathcal{M}(E)} + ||T_-||_{\mathcal{M}(E)} = T_+(1) + T_-(1).$$

De plus, la décomposition $T = T_+ - T_-$ est minimale, au sens où si $T = T_1 - T_2$ avec T_I des mesures de Radon positives, alors $T_1 \geqslant T_+$ et $T_2 \geqslant T_-$.

Proof. Il faut montrer que T_+ et T_- sont des formes linéaires. Par définition $T_+(\lambda f) = \lambda T_+(f)$ si $f \geqslant 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Pour l'additivité, soient $f_1, f_2 \geqslant 0$. On a

$$T_+(f_1) + T_+(f_2) = \sup\{T(g_1 + g_2),\ \ 0 \leqslant g_i \leqslant f_i\} \leqslant T_+(f_1 + f_2).$$

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ et g telle que $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$ et $T_+(f_1 + f_2) \leqslant T(g) + \varepsilon$. Alors comme $g = \min(g, f_1)_+ + (g - f_1)_+$ et $0 \leqslant (g - f_1)_+ \leqslant f_2$, on a

$$T_+(f_1 + f_2) \leqslant T(\min(g, f_1)_+) + T((g - f_1)_+) + \varepsilon \leqslant T_+(f_1) + T_+(f_2) + \varepsilon$$

et donc T_+ est bien additive sur les fonctions positives. Ensuite, si $f_1, f_2 \geqslant 0$ et $f = f_1 - f_2 = f_+ - f_-$ alors $f_1 + f_- = f_2 + f_+$ et

$$\begin{aligned} &T_+(f_1) + T_+(f_-) = T_+(f_2) + T_+(f_+) \\ &\qquad\qquad \Rightarrow T_+(f) = T_+(f_1 - f_2) = T_+(f_+) - T_+(f_-) = T_+(f_1) - T_+(f_2) \end{aligned}$$

donc T_+ est additive. De plus $T_+(-f) = T_+(0 - f) = -T_+(f)$, donc T_+ est linéaire.

Ensuite, $T_+(||f|| - f) \leqslant 0$ donc $T_+(f) \leqslant ||f|| T_+(1) \leqslant ||f||\,||T||$ donc T_+ est continue.

Si $f \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} (T_+ - T)(f) &= \sup\{T(g - f); 0 \leqslant g \leqslant f\} \\ &= \sup\{-T(h) 0 \leqslant h \leqslant f\} \\ &= T_-(f). \end{aligned}$$

La même identité vaut pour f générale via la décomposition $f = f_+ - f_-$. On en déduit que T_- ets aussi linéaire et continue. Ensuite, si $||f|| \leqslant 1$ on a

$$T(f) = T_+(f) - T_-(f_+) + T_-(f_-) \leqslant T_+(1) + T_-(1)$$

et de plus

$$\begin{aligned} T_+(1) + T_-(1) &= \sup\{T(f - g); 0 \leqslant f, g \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{T(h), ||h|| \leqslant 1\} \\ &\leqslant ||T|| \end{aligned}$$

On a donc bien $||T|| = T_+(1) + T_-(1)$.

Il nous reste à montrer que la décomposition est minimale. Si $T = T_1 - T_2$ avec T_1, T_2 deux formes linéaires positives, alors $T \leqslant T_1$, et donc $\forall f \geqslant 0$ on a

$$T_+(f) \leqslant \sup\{T_1(g), g \in C(E), 0 \leqslant g \leqslant f\} = T_1(f)$$

donc $T_+ \leqslant T_1$, et nécessairement alors $T_- \leqslant T_2$. □

Théorème 4.2.8. *Si T ets une mesure de Radon sur l'espace métrique compact (E, d) alors il existe μ_1, μ_2 deux mesures boréliennes positives finies telles que*

$$T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

De plus, il existe une unique telle représentation telle que $||T|| = \mu_1(E) + \mu_2(E)$.

On voit $\mu_1 - \mu_2$ comme une mesure signée, et l'égalité des normes est lorsqu'on a pris la décomposition de la mesure signée comme une différence de deux mesures positives étrangères.

4.2.2 Théorème de Riesz, cas localement compact

Dans toute cette section, (E, d) sera un espace métrique localement compact et σ-compact

Dans le cadre non-compact, on doit distinguer trois espaces différents de fonctions continues :

-L'espace $C_c(E)$ des fonctions continues à support compact.

-L'espace $C_b(E)$ des fonctions continues bornées.

-L'espace $C_0(E)$ des fonctions continues ayant une limite nulle à l'infini, c'est à dire

$$\{f \in C(E); \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ compact t.q. } \sup_{E \setminus K} |f(x)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Ce espace est l'adhérence de $C_c(E)$ pour la norme uniforme sur E.

La convegrence étroite des mesures de probabilités est en dualité avec $C_b(E)$, mais ce n'est pas la même que la convergence en dualité avec $C_0(E)$. En effet, on vérifie aisément que la suite des masses de Dirac δ_n en les entiers naturels ne converge pas étroitement, mais elle converge faible-* vers 0 lorsque vu comme un élément de $C_0(E)^*$.

Définition 4.2.9. *Une suite de mesures finies $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vaguement vers μ si*

$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in C_0(E).$$

Comme la fonction constante égale à 1 n'est pas dans $C_0(E)$, en général la convergence vague n'implique pas la convergence de la masse totale (alors que c'était le cas dans le cadre compact).

Exercice 4.2.1. *Montrer que $C_0(E)$ est séparable.*

Il s'avère que ce sont les formes linéaires continues sur $C_0(E)$ qu'on peut toujours représenter par des mesures finies :

Théorème 4.2.10. *Soit (E, d) un espace métrique localement compact et σ-compact, et T une forme linéaire continue positive sur $C_0(E)$. Il existe une mesure positive sur E telle que*

$$T(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C_0(E)$$

Et de plus $||T|| = \mu(E)$.

Pour un exemple de forme linéaire sur $C_b(E)$ non-représentable par une mesure, on peut considérer $E = \mathbb{R}$ et $T(f) = \lim_{+\infty} f$ sur les fonctions admettant une limite, qu'on prolonge ensuite via le théorème de Hahn-Banach. C'est une forme linéaire non-nulle, mais nulle sur toutes les fonctions à support compact. Donc si une mesure borélienne la représentait, elle serait nulle sur tous les compacts, donc nulle, ce qui serait une contradiction.

Esquisse de preuve. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de E. Il existe une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mesures finies telles que

$$T(f) = \int f d\mu_n \quad \forall f \in C(K_n); \;\; \mu_n(K_n) \leqslant ||T||.$$

On peut étendre ces mesures à E via $\mu_n(A) := \mu_n(A \cap K_n)$.

Comme les K_n sont croissantes, par unicité de la mesure dans le cadre compact, on vérifie que la restriction de μ_{n+1} à K_n est μ_n. Donc pour tout borélien A la suite $\mu_n(A)$ est croissante, bornée par $||T||$, donc converge vers un réel positif noté $\mu(A)$. Il nous faut montrer que μ est une mesure, puis que $T(f) = \int f d\mu \forall f \in C_0(E)$.

Soit (A_k) une famille de boréliens deux à deux disjoints. Par monotonie, on a

$$\mu\left(\cup A_k\right) \geqslant \mu_n(\cup A_k) = \sum \mu_n(A_k) \geqslant \sum_{k \leqslant N} \mu_n(A_k).$$

En faisant tendre n vers l'infini, puis N, on obtient

$$\mu\left(\cup A_k\right) \geqslant \sum_k \mu(A_k).$$

Pour l'inégalité inverse, on a

$$\mu_n\left(\cup A_k\right) = \sum \mu_n(A_k) \leqslant \sum_k \mu(A_k)$$

et on fait tendre n vers l'infini pour conclure.

Enfin, μ représente T sur les fonctions continues à support compact car la suite est exhaustive, et par densité on conclut aussi pour les éléments de $C_0(E)$. □

En utilisant le théorème de Banach-Alaoglu, on obtient :

Corollaire 4.2.11. *De toute suite de mesures de probabilités sur E on peut extraire une sous-suite qui converge vaguement.*

Attention, la limite dans ce corollaire n'est pas nécessairement une mesure de probabilité.

On peut passer des formes linéaires positives aux formes linéaires générales avec la même décomposition que dans le cas compact :

Théorème 4.2.12. *Soit E un espace métrique localement compact σ-compact, et T une forme linéaire continue sur $C_0(E)$ (muni de la norme uniforme). Il existe deux mesures boréliennes positives finies telles que*

$$T(f) = \int f d\mu_+ - \int f d\mu_-; \quad ||T|| = \mu_+(E) + \mu_-(E).$$

4.3 Théorème de Prokhorov

Définition 4.3.1 (Tension)**.** *Un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(E)$ est tendu si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset E$ tel que*

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \mu(E \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 4.3.1.

1. *Soit μ une mesure de probabilité sur un espace polonais. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, il existe un nombre fini N_k de boules de rayon $1/k$ dont l'union est de mesure supérieure à $1 - 2^{-k}\varepsilon$.*

2. *En déduire que le singleton $\{\mu\}$ est tendu.*

3. *Montrer qu'un ensemble fini de mesures de probabilité sur un espace polonais est tendu.*

Solution 4.3.1. 1. *Comme E est polonais, on peut considérer une suite dénombrable dense $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme pour tout $k \geqslant 1$, on a $\cup_n \bar{B}(z_n, 1/k) = E$, où $\bar{B}$ est une boule fermée de centre et rayon donnés, on peut toujours trouver N_k tel que*

$$\mu\left(\cup_{n\leqslant N_k} \bar{B}(z_n, 1/k)\right) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

2. *On considére $A = \cap_k \left(\cup_{n\leqslant N_k} \bar{B}(z_n, 1/k)\right)$. On a*

$$\mu(A^c) \leqslant \sum_k \mu\left(\left(\cup_{n\leqslant N_k} \bar{B}(z_n, 1/k)\right)^c\right) \leqslant \varepsilon.$$

De plus, A est recouvrable par un nombre fini de boules de rayon arbitrairement petit, donc A est précompact. Comme de plus A est fermé, cet ensemble est compact. On a donc un ensemble compact de masse arbitrairement proche de 1, donc $\{\mu\}$ est tendu.

3. *Soit $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ un ensemble fini de mesures. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des compacts K_i tels que $\mu_i(K_i) \geqslant 1 - \varepsilon$. Alors $\cup_i K_i$ est un compact, et tous les μ_i lui donnent une masse supérieure à $1-\varepsilon$. L'ensemble $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ est donc tendu.*

Théorème 4.3.2. *Soit (E, d) un espace métrique localement compact et σ-compact. Une famille de mesures de probabilité est relativement compacte dans $\mathbb{P}(E)$ (pour la convergence étroite) ssi elle est tendue.*

Ce théorème est aussi vrai dans le cadre des espaces polonais (mais la preuve est différente, car on ne peut plus s'appuyer sur le théorème de Riesz).

Proof. Démontrons que une famille tendue est relativement compacte. Soit $T_n = \int f d\mu_n$ où (μ_n) est une suite dans l'ensemble tendu. Quitte à extraire, on peut supposer que T_n converge faible-* vers $T = \int f d\mu$, et donc que μ_n converge vaguement vers μ. Par semi-continuité inférieure on a $\mu(E) \leqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact tel que $\sup_n \mu_n(E\backslash K) \leqslant \varepsilon$. Sans perdre de généralité on peut aussi supposer que $\mu(E\backslash K) \leqslant \varepsilon$. Soit $f \in C_b(E)$ et $g \in C_c(E)$ telle que $\mathbb{1}_K \leqslant g \leqslant 1$. Alors

$$\left|\int f d\mu_n - \int f d\mu\right| \leqslant \left|\int fg d\mu_n - \int fg d\mu\right| + ||f||_\infty(\mu_n(E\backslash K) + \mu(E\backslash K)).$$

Le premier terme tend vers 0 par convergence vague, car $fg \in C_c(E)$. Le second terme est contrôlé par $\varepsilon||f||_\infty$. On en déduit la convergence étroite. Et en prenant $f = 1$ on voit que μ est bien une mesure de probabilité. □

Exemple 4.3.1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $\mathbb{R}^d$ et μ_n la suite des lois.*

1. *Si $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ pour un $p > 0$ alors (μ_n) est tendue.*

2. *Si il existe une variable aléatoire positive Y telle que $|X_n| \leqslant Y$ p.s., alors (μ_n) est tendue.*

4.4 Concentration-compacité

Théorème 4.4.1 (Concentration-compacité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$)**.** *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilités. On peut en extraire une sous-suite (que par abus de langage on notera encore $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$) qui vérifie l'une des trois possibilités suivantes :*

1. *Evanescence : pour tout $R > 0$ on a $\lim_n \sup_x \mu_n(B(x, R)) = 0$;*
2. *Concentration : Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que $\mu_n(B(x_n, R)) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout n.*
3. *Dichotomie : il existe $\lambda \in (0, 1)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$, une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n*
$$|\mu_n(B(x_n, R)) - \lambda| \leqslant \varepsilon; \quad \mu_n(B(x_n, R_n)\backslash B(x_n, R)) \leqslant \varepsilon.$$

Définition 4.4.2. *La fonction de concentration de Lévy d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^d$ est*
$$Q(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mu(B(x, r)).$$

La fonction de concentration étant une fonction croissante, on va pouvoir utiliser le lemme suivant :

Proposition 4.4.3 (Lemme de Helly-Braye)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Alors il existe une sous-suite qui converge simplement.*

Preuve du lemme de Helly-Braye. Comme un produit dénombrable d'espaces métriques séquentiellement compacts est séquentiellement compact, il existe une sous suite convergeante en tous points de $\mathbb{Q}$, que nous noterons f_n. Notons f la limite de cette sous-suite convergeante. On peut définir

$$f_-(x) := \sup\{f(y), y \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, x]\}, \quad f_+(x) := \inf\{f(y), y \in \mathbb{Q} \cap [x, +\infty)\}.$$

Par monotonie, l'ensemble D des points auxquels $f_-(x) < f_+(x)$ est au plus dénombrable. Notons encore $f(x)$ leurs valeurs communes sur $\mathbb{R}\backslash D$.

Nous allons maintenant montrer que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash D$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash D$. Il existe $y < x$ et $z > x$ rationnels tels que

$$f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon; \quad f(z) \leqslant f(x) + \varepsilon$$

. Par convergence simple des suites $(f_n(y))$ et $(f_n(z))$, pour tout n suffisamment grand on a alors
$$f_n(y) \geqslant f(x) - 2\varepsilon; \quad f(z) \leqslant f(x) + 2\varepsilon$$
. Par monotonie des f_n, on a alors pour n suffisamment grand

$$f(x) - 2\varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) - 2\varepsilon$$

et donc on a bien convergence simple sur $\mathbb{R}\backslash D$.

Enfin, comme D est dénombrable, on peut extraire une sous-suite qui converge aussi simplement sur D, ce qui conclut la preuve. □

Preuve du Théorème 4.4.1. On considère la suite Q_n des fonctions de concentration. Comme c'est une suite de fonctions croissantes à valeurs dans $[0,1]$, en appliquant le lemme de Helly-Bray quitte à extraire on peut supposer qu'elle converge simplement vers une limite Q, qui est une fonciton croissante à valeurs dans $[0,1]$. Quitte à n'avoir la convergence que presque partout (ou plus précisément, sauf en un nombre dénombrable de points), on peut supposer que Q est continue à gauche, et alors $Q(R) \leqslant \liminf Q_n(R_n)$.

1er cas : $Q(\infty) = 0$. On vérifie alors aisément que la sous-suite est evanescente.

2eme cas : $Q(\infty) = 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que à partir d'un certain rang $Q_n(R) \geqslant 1 - \varepsilon$. Appliquer cet énoncé tel quel donne une suite (x_n) qui dépend de R, donc il faut travailler un peu plus. Soit R_0 et $(x_n)_{n\in N}$ telles que $\mu_n(B(x_n, R_0)) \geqslant Q_n(R_0) - n^{-1} > 1/2$ (pour n assez grand). Soit $R > 0$ tel que $Q(R) > 1 - \varepsilon > 1/2$ et (y_n) telle que $\mu_n(B(y_n, R)) \geqslant Q_n(R) - n^{-1}$. Comme

$$\liminf \mu_n(B(x_n, R_0)) + \mu_n(B(y_n, R)) > 1$$

pour n assez grand l'intersection des deux boules est non vide, et $B(y_n, R) \subset B(x_n, 2R+R_0)$. Alors $\liminf \mu_n(B(x_n, 2R+R_0)) \geqslant 1-\varepsilon$, et on a donc concentration.

3eme cas : $Q(\infty) = \lambda \in (0,1)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $R > 0$, une suite (x_n) et une suite croissante (R_n) telles que $R_n > R' > R$ et pour n assez grand

$$|\mu_n(B(x_n, R) - \lambda| < \varepsilon; \quad \mu_n(R^d \backslash B(x_n, R_n)) < 1 - \lambda + \varepsilon.$$

□

4.5 Introduction au transport optimal

Pour une introduction plus complète au transport optimal, on pourra consulter [7, 14].

Définition 4.5.1 (Transport optimal)**.** *Soit* $c\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue, et* $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$*. Le problème de transport optimal avec coût c est*

$$\inf_{\pi \in C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi$$

où $C(\mu,\nu)$ *est l'ensemble des couplages de* μ*, et* ν*, c'est à dire l'ensemble des mesures de probabilités sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *dont la première marginale est* μ *et la deuxième marginale ets* ν*.*

On peut aussi voir $C(\mu,\nu)$ comme l'ensemble des lois de variabls aléatoires de la forme (X,Y) où X a pour loi μ et Y a pour loi ν.

Théorème 4.5.2 (Existence du transport optimal)**.** *Supposons que c est continue minorée et que* $\int c(x,y) d\mu(x) d\nu(y) < \infty$*. Alors il existe un couplage optimal.*

Lemme 4.5.3. *Pour toutes mesures de probabilité* μ *et* ν *sur* $\mathbb{R}^d$ *données, l'ensemble des couplages de* μ *et* ν *est compact.*

Proof. Commençons par montrer que l'ensemble des couplages est relativement compact. Soit $\varepsilon > 0$ et K_1 et K_2 des compacts tels que

$$\mu(K_1^c) \leqslant \varepsilon/2; \quad \nu(K_2^c) \leqslant \varepsilon/2.$$

Alors pour tout couplage π on a

$$\pi((K_1 \times K_2)^c) \leqslant \pi(K_1^c \times \mathbb{R}^d) + \pi(\mathbb{R}^d \times K_2^c) = \mu(K_1^c) + \nu(K_2^c) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $K_1 \times K_2$ est compact, on en déduit que l'ensemble des couplages est tendu, et donc relativement compact par le Théorème de Prokhorov.

Il nous reste à montrer que l'ensemble des couplages est fermé pour la convergence étroite pour conclure la preuve. Soit π_n une suite de couplages, qui converge étoitement vers une mesure de probabilité π sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Pour toute fonction continue bornée

$$\int f(x) d\pi(x,y) = \lim \int f(x) d\pi_n(x,y) = \lim_n \int f(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

Donc la première marginale de π est μ. Le même raisonnement appliqué àla seconde marginale montre qu'elle est égale à ν, et donc π est aussi un couplage de μ et ν. L'ensemble des couplages est donc bien fermé, et donc compact. □

Preuve du Théorème 4.5.2. Tout d'abord, comme la mesure produit est un couplage, l'inf est fini.

Soit π_n une suite de couplages de μ et ν tels que

$$\lim \int c(x,y) d\pi_n = \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi$$

Comme l'ensemble des couplages est compact, quitte à extraire, on peut supposer que π_n converge étroitement vers un couplage π_∞. Comme π_∞ est un couplage, par définition on a

$$\int c(x,y) d\pi_\infty \geqslant \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi.$$

De plus, pour tout $R > 0$

$$\begin{aligned} \int (c \wedge R) d\pi_\infty &= \lim_n \int (c \wedge R) d\pi_n \\ &\leqslant \lim_n \int c d\pi_n = \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi. \end{aligned}$$

Et donc, par limite monotone en R, on a

$$\int c d\pi_\infty \leqslant \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi..$$

Comme on avait déjà l'inégalité inverse, on en déduit qu'il y a égalité, ce qui conclut la preuve. □

Chapter 5

Introduction aux distributions

La théorie des distributions a été développée par L. Schwartz dans les années 40 et 50 (avec des travaux antérieurs de Heaviside en physique, et de Hadamard, Leray, Sobolev... au début du 20eme siècle), avec pour but de donner un sens aux dérivées de fonctions non-lisses, ainsi que de mesures. Elle est basée sur deux principes :

-on peut considérer une fonction f via la forme linéaire associée

$$\int f\varphi dx \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d);$$

-si on cherche une fonction g de la forme $g = \partial_{\mathbf{k}} f = \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_d}^{k_d}$, après intégration par parties cela revient à considérer les $\int (-1)^{|\mathbf{k}|} f \partial_{\mathbf{k}} \varphi dx$ pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, on peut chercher à résoudre une EDP de la forme

$$\sum_{\mathbf{n}\in I} \partial_{\mathbf{n}} f = g$$

où I est un ensemble fini de multi-indices, en cherchant une fonction f telle que

$$\int \sum \mathbf{n} \in I (-1)^{|\mathbf{n}|} f \partial_{\mathbf{n}} \varphi dx = \int g\varphi dx.$$

On parle de solution au sens des distributions. Plus généralement, f peut ne pas être une fonction, mais seulement un élément d'un espace de formes linéaires. On pourrait également considérer d'autres espaces de fonctions que $c_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Comme dans le chapitre précédent, il sera parfois utile de travailler aec une suite exhaustive de compacts. Dans le cadre d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, un exemple simple est $K_j := \{x \in \Omega; |x| \leqslant j$ et $d(x, \Omega^c) \leqslant j^{-1}$. On a bien $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ et $\Omega = \cup K_j$.

5.1 Intégration par parties

Définition 5.1.1 (Suite régularisante). *Une suite régularisante sur $\mathbb{R}^d$ est une famille de fonctions $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définies par $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\rho_1(x/\varepsilon)$ où ρ_1 est une fonction C^∞ à support dans $B(0,1)$ avec $\int \rho_1 dx = 1$.*

Si on veut un exemple précis de telle fonction, on peut utiliser $\rho_1(x) := C\exp(1/(x^2-1))$ si $|x| < 1$, et 0 sinon.

Lemme 5.1.2. *Si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_\varepsilon * f \in C_c^\infty$ et converge uniformément et dans L^p vers f.*

Lemme 5.1.3 (Partition de l'unité sur $\mathbb{R}^d$, version lisse). *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $U_1, ..., D_k$ un recouvrement de K par des ouverts. Il existe des fonctions $\varphi_j \in C_c^\infty$ et à valeurs dans $[0,1]$, chacune nulle en dehors de U_j, et telles que $\sum \varphi_j = 1$ sur un voisinage de K.*

Pour pouvoir faire des intégrations par parties, il va nous falloir définir le terme de bord. On ne considérera que le cas de domaines ouverts à bord lisse, au sens suivant

Définition 5.1.4. *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ ets de classe C^k si il existe $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\Omega = \{\Phi < 0\}$, $\partial\Omega = \{\Phi = 0\}$ et $\nabla\Phi \neq 0$ sur $\partial\Omega$.*

La normale extérieure de Ω en $x \in \partial\Omega$ est alors

$$n(x) := \frac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|}.$$

On construit ensuite la mesure de surface de l'ouvert Ω. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et $e_d = n(x_0)$. On paramétrise alors $x = (x', x_d)$ avec x' les coordonnées de la projection de x sur l'hyperplan $e_d^\perp$ (qu'on identifie à $\mathbb{R}^{d-1}$). Alors $\partial_d\Phi(x_0)\nabla\Phi(x_0) \cdot n(x_0) = 1$, et par théorème des foncitons implicites il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ contenant x_0, Q un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ contenant x_0' et $\varepsilon > 0$ tels que $x \longrightarrow (x', \Phi(x))$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. On note g la fonction telle que $(x', t) \longrightarrow (x', g(x', t))$ soit l'inverse de ce difféomorphisme (donc définie sur $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$), et $g_0(x') = g(x', 0)$. On a alors

$$\{\Phi = t\} \cap U = \{(x', g(x', t));\ \ x' \in Q\}\ \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon); \tag{5.1}$$

$$\Omega \cap U = \{(x', g(x', t));\ \ x' \in Q,\ \ t \in (-\varepsilon, 0)\}; \tag{5.2}$$

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', g_0(x'));\ \ x' \in Q\}. \tag{5.3}$$

Pour $f \in C_c(U)$, on pose alors

$$\int f d\sigma = \int_Q f(x', g_0(x'))\sqrt{1 + |\nabla g_0(x')|^2} dx'.$$

On généralise ensuite aux fonctions $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ en considérant les ouverts U_x associés à chaque point de $\partial\Omega$ puis en en extrayant un reocuvrement de $\mathrm{supp}(f) \cap \partial\Omega$ par un nombre fini d'ouverts $U_1, ...U_k$. On considère ensuite une partition de l'unité (θ_j) subordonnée à ce recouvrement. La cosntruction précédente s'applique à chaque $\theta_j f$, et on pose

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma := \sum \int \theta_j f d\sigma.$$

La mesure σ ainsi définie est la mesure de surface de $\partial\Omega$.

Avec cette construction, il n'est pas évident de voir que σ ne dépend pas du choix des ouverts U_j et des fonctions g obtenues via le théorème des fonctions implicites. C'est toutefois le cas, grâce au lemme suivant :

Lemme 5.1.5. *Soit Ω un ouvert de classe C^1, Φ et σ comme définies précédemment, et $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. On a alors*

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx$$

où $\Omega_\delta := \{x \in \Omega;\ \ \Phi(x) > -\delta\}$.

Proof. On peut supposer sans perdre de généralité que $\text{supp}(f) \subset U$ où U est un ouvert tel que la paramétrisation (5.1) soit vraie pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pour tout $\delta < \varepsilon$ on a

$$\Omega_\delta \cap U = \{(x', t); \quad x' \in Q, \quad t \in (-\delta, 0)\}.$$

Comme le jacobien du changement de variable $(x', t) \longrightarrow (x', g(x', t))$ est $\partial_t g(x', t)$, on a par changement de variable

$$\int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx = \int_{-\delta}^{0} \int_Q |\nabla\Phi(x', g(x', t))| f(x', g(x', t)) |\partial_t g(x', t)| dx' dt.$$

Mais comme $\Phi(x', g(x', t)) = t$ par construction, on a

$$\partial_d \Phi(x', g(x', t)) \partial_t g(x', t) = 1; \quad \nabla_{x'} \Phi(x', g(x', t)) = -\partial_d \Phi(x', g(x', t)) \nabla_{x'} g(x', t).$$

Donc

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi(x', g(x', t))|^2 &= |\partial_d \Phi(x', g(x', t))|^2 + |\nabla_{x'} \Phi(x', g(x', t))|^2 \\ &= |\partial_d \Phi(x', g(x', t))|^2 (1 + |\nabla_{x'} g(x', t)|^2) \\ &= \frac{1 + |\nabla_{x'} g(x', t)|^2}{\partial_t g(x', t)^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{0} \int_Q f(x', g(x', t)) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} g(x', t)|^2} dx' dt$$

et on passe à la limite en utilisant le théorème de Fubini et le théorème de convergence dominée. □

Théorème 5.1.6 (Formule de Stokes). *Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On a*

$$\int_\Omega \text{div}(\psi) dx = \int_{\partial\Omega} \psi(x) \cdot n(x) d\sigma(x).$$

Proof. Tout d'abord, on rappelle que si φ est à support compact inclus dans Ω, alors $\int_\Omega \partial_i \varphi dx = 0$.

Soit ρ_δ une suite régularisante sur $\mathbb{R}$, g_δ la fonction continue paire égale à 1 sur $[0, \delta]$, affine sur $[\delta, 1]$ et nulle au delà, et $f_\delta := \rho_{\delta/2} * g_\delta$. On pose $\eta_{\varepsilon,\delta} := f_\delta(\varepsilon^{-1}\Phi)$ avec δ et ε petits. Comme η est constante égale à 1 sur un voisinage de $\Phi = 0$, $(\eta - 1)\varphi$ est à support compact inclus dans Ω, et donc on a

$$\int_\Omega \text{div}(\varphi) dx = \int_\Omega \text{div}(\eta_{\varepsilon,\delta}\varphi) dx = \int_\Omega \eta_{\varepsilon,\delta} \,\text{div}(\varphi) dx + \int_\Omega \nabla\eta_{\varepsilon,\delta} \cdot \varphi dx.$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 (uniformément en $\delta \in (0, \delta_0])$), par application du théorème de convergence dominée. Le second terme est égal à

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\varepsilon(1+\delta/2)}} f'_\delta \nabla\Phi \cdot \varphi dx,$$

et come Φ est régulière, $\{\Phi = \varepsilon\} \cap \operatorname{supp}(\varphi)$ est de mesure nulle pour ε assez petit, par convergence dominée lorsque $\delta \to 0$ ce terme converge vers

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\Phi \cdot \varphi dx.$$

Une application du lemme 5.1.5 donne

$$\lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\Phi \cdot \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \cdot \varphi d\sigma = \int n(x) \cdot \varphi(x) d\sigma(x).$$

□

Corollaire 5.1.7 (Intégration par parties). *Si $f, g \in C^1_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on a*

$$\int_\Omega f\partial_i g = -\int_\Omega \partial_i f g + \int_{\partial\Omega} f g n_i d\sigma.$$

Si $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ on a

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) = -\int \nabla u \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} u\varphi \cdot n d\sigma.$$

Enfin, si $f, g \in C^2_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ alors

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = -\int_\Omega (\Delta u) v + \int_{\partial\Omega} (\partial_n u) v d\sigma$$

et

$$\int_\Omega (\Delta u) v = \int_\Omega u(\Delta v) + \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u - u\partial_n v)\, d\sigma.$$

Proof. La première inégalité se déduit de la formule de Stokes en prenant $\varphi = uve_i$. La deuxième s'obtient en utilisant $\operatorname{div}(u\varphi) = u \operatorname{div}(\varphi) + \nabla u \cdot \varphi$. La troisième s'obtient en prenant $\varphi = \nabla u$ et en utilisant que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. La dernière se déduit de la trosième en symmétrisant les rôles de u et v. □

5.2 Topologie limite inductive et espace $\mathcal{D}(\Omega)$

Si K ets un comapct, l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support dans K, muni de la familel de semi-normes

$$p_n(f) = \max_{|\mathbf{k}| \leqslant n, x \in K} |\partial_k f(x)|$$

Est un espace de Fréchet. En revanche, si Ω est un ouvert, l'espace

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega), \quad \operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega\}$$

muni des semi-normes

$$p_n(f) = \max_{|\mathbf{k}| \leqslant n, x \in \Omega} |\partial_k f(x)|$$

est un pré-Fréchet, mais il n'est pas complet. Son complété pour ces semi-normes est $C^\infty_0(\Omega)$, l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées tendent vers 0 au bord de Ω (et à l'infini si Ω n'est pas borné).

On va munir $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une autre topologie, plus fine, qui le rend complet. Cette topologie ne sera pas métrisable, mais ce ne sera pas un problème en pratique.

5.2.1 Généralités sur la topologie limite inductive pour des suites d'espace de Fréchet

Définition 5.2.1. *Soit E un EVTLC et $(E_k, \mathcal{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels, chacun muni d'une topologie d'EVTLC dont l'ensemble des ouverts est $\mathcal{T}_k$, et telle que $E = \cup E_k$. On suppose que chaque E_k est fermé dans E_{k+1}, et que la topologie induite par $\mathcal{T}_{k+1}$ sur E_k est $\mathcal{T}_k$. On associe à chaque $\mathcal{T}_k$ une famille de semi-normes $\mathcal{P}_k = (p_\alpha^k)_{\alpha\in\mathcal{A}_k}$ définissant la topologie. La topologie limite inductive des $(\mathcal{T}_k)$ sur E, notée $\mathcal{T}$ est celle définie par la famille de semi-normes*

$$\mathcal{P} := \{p \text{ semi-norme sur } E \text{ t.q. } \forall k \ \ p|_{E_k} \text{ est continues.}\}.$$

Autrement dit, $p \in \mathcal{P}$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ et $J \subset \mathcal{A}_k$ finie telles que

$$p \leqslant C \sup_{\alpha\in J} p_\alpha^k \text{ sur } E_k.$$

Proposition 5.2.2. *La topologie limite inductive est la topologie d'EVTLC la plus fine rendant continue les injections canoniques de E_k dans E.*

Proof. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie rendant continues les injections canoniques, et soit p une semi-norme associée. Alors $p|_{E_k}$ est continue, et donc $p \in \mathcal{P}$, d'où $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

Proposition 5.2.3. *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive des $(E_k, \mathcal{T}_k)$ et F un EVTLC. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est continue pour cette topologie ssi $f|_{E_k}$ est continue pour la topologie $\mathcal{T}_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Proof. Si f est continue alors sa restriction à E_k l'est aussi, par continuité de l'injection canonique J_k. Réciproquement, si toutes les restructions sont continues, étant donné q une semi-norme sur F, $q \circ f \circ J_k$ est une semi-norme continue sur E_k, et donc $q \circ f$ est une semi-norme continue sur chaque E_k, donc un élément de $\mathcal{P}$, ce qui implique la continuité de f pour la topologie limite inductive. □

Proposition 5.2.4. *On se place dans le cadre de la Définition 5.2.1. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si U est un convexe symétrique non-vide de E, tel que $U \cap E_k$ est un ouvert de E_k pour tout k, alors U est un voisinage ouvert de 0 dans $(E, \mathcal{T})$.*
2. *La topologie induite par $(E, \mathcal{T})$ sur E_k est celle de E_k.*
3. *Si chaque $(E_k, \mathcal{T}_k)$ est séparé, alors $(E, \mathcal{T})$ l'est aussi.*
4. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, E_k est fermé dans $(E, \mathcal{T})$.*

Lemme 5.2.5. *Soit E un EVTLC et F un sous-espace vectoriel de E. Si U est un ouvert convexe de F pour la topologie induite par celle de E, il existe un ouvert convexe V de E tel que $U = V \cap F$.*

Proof. Sans perdre de généralité, on suppose $0 \in U$. Par définition de la topologie induite il existe un ouvert de E tel que $U = O \cap F$. Par convexité locale il existe un ouvert convexe W tel que $0 \in W \subset O$. Soit

$$V := \cup_{t\in[0,1]}(tW + (1-t)U) = \cup_{t\in(0,1]}(tW + (1-t)U).$$

On peut exclure $t = 0$ car si $x \in U$, il existe ε assez petit tel que $\varepsilon^2 x \in W$ et $(1+\varepsilon)x \in U$. V est un ouvert convexe contenant U, et donc $U \subset V \cap F$. Réciproquement, pour tout $t \in (0,1]$

$$(tW + (1-t)U) \cap F = tW \cap F + (1-t)U \cap F \subset tO \cap F + (1-t)U \cap F \subset U$$

et donc $V \cap F \subset U$, ce qui conclut la preuve. □

Proof of Proposition 5.2.4.

1. Pour tout k, il existe une boule B_k pour les semi-normes $\mathcal{P}_k$ telle que $B_k \subset U \cap E_k$. Alors $j_U|_{E_k}$ (la retsruction de la jauge de U à E_k) est majorée par j_{B_k}, et donc j_U est une semi-norme de $(E, \mathcal{T})$. Comme $\{j_U < 1\} \subset U$, U est bien un voisinage de 0.

2. Soit U un ouvert de E. Comme l'injection canonique J_k est continue, $U \cap E_k = J_k^{-1}(U)$ est un ouvert, et donc $\mathcal{T}|_{E_k} \subset \mathcal{T}_k$.

   Réciproquement, soit $U_k \in \mathcal{T}_k$ un voisinage de 0, qu'on peut supposer sans perdre de généralité ouvert et symétrique. Nous allons montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathcal{T}$ tel que $U_k = U \cap E_k$. Par application itérée du Lemme 5.2.5, il existe une suite (U_{k+l}) telle que U_{k+l} soit un ouvert de E_{k+l} et $U_k = U_{k+l} \cap E_k$. Soit $U = \cup_l U_{k+l}$. Comme les U_{k+l} sont croissants, U est un ouvert convexe, et est un voisinage de 0 par la première partie. Et on a bien $U_k = U \cap E_k$.

3. Soit $x \in E \backslash \{0\}$. Nous allons montrer qu'il existe un voisinage U de 0 tel que $x \notin U$. Il existe k tel que $x \in E_k$ et U_k ouvert de E_k tel que $x \notin U_k$ et $0 \in U_k$. Par application du point précédent il existe un ouvert U de E tel que $U_k = U \cap E_k$, qui est un voisinage de 0 ne contenant pas x.

4. Soit $x \notin E_k$ et m tel que $x \in E_m$. Il existe un voisinage convexe symétrique U_m de 0 tel que $(x + U_m) \cap E_k = \emptyset$ ca E_k est fermé dans E_m. Alors en prenant U un ouvert de E tel que $U_m = U \cap E_m$, on a $(x + U) \cap E_k = \emptyset$, et donc E_k est fermé dans $(E, \mathcal{T})$.

□

Proposition 5.2.6. *On se place dans le cadre de la Définition 5.2.1. Soit (x_n) une suite de E et $x \in E$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(E, \mathcal{T})$ ssi il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout n et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $(E_k, \mathcal{T}_k)$.*

Proof. Le sens réciproque découle immédiatement de la deuxième partie de la Proposition 5.2.4. Pour le sens réciproque, soit (x_n) une suite convergeant vers x dans $(E, \mathcal{T})$. Il nous suffit de montrer que il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout n (et on peut alors conclure avec la Proposition 5.2.4).

Raisonnons par l'absurde, et supposons que ce n'est pas le cas. Il existe alors deux suites k_ℓ et n_ℓ, avec (k_ℓ) strictement croissante, telles que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on ait $x_{n_\ell} \in E_{k_{\ell+1}} \backslash E_{k_\ell}$. Comme E_{k_ℓ} est fermé dans E, par le théorème de Hahn-Banach il existe une forme linéaire continue T_ℓ nulle sur E_{k_ℓ} et telle que $T_\ell(x_{n_\ell}) \neq 0$. On définit alors

$$p(y) := \sum_{\ell \geqslant 0} \ell \frac{|T_\ell(y)|}{|T_\ell(x_{n_\ell})|}.$$

Elle est bien définie car pour y fixé elle est finie, et c'ets une semi-norme sur chaque E_k. Donc c'est une semi-norme sur E. Comme (x_n) converge, $(p(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Mais par construction $p(x_{n_\ell}) \geqslant \ell$, donc on a une contradiction.

□

Proposition 5.2.7. *Une limite inductive d'EVTLC séquentiellement séparables est séquentiellement séparable.*

Proof. Soit D_k un ensemble dénombrable dense de E_k, et $D = \cup D_k$, qui est dénombrable. En utilisant la caractérisation précédente des suites convergentes, on voit que D est séquentiellement dense. □

Définition 5.2.8. *Soit E un EVTLC dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $\mathcal{P}$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $p(x_k - x_\ell) < \varepsilon$ pour tout $k, \ell \geqslant N$.*

Un EVTLC est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Corollaire 5.2.9. *Une limite inductive d'EVTLC complets est complète.*

Proof. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Etant donné une semi-norme p, comme $p(x_n)$ est bornée, en reprenant le raisonnement dans la preuve de la Proposition 5.2.6 on voit que il existe k tel que $x_n \in E_k$ pour tout k. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E_k, donc convergente dans E_k, et donc dans $(E, \mathcal{T})$. □

Exercice 5.2.1. *En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'une limite inductive d'une suite strictement croissante d'espaces de Fréchet n'est pas métrisable.*

Solution 5.2.1. *Par stricte croissance, les E_k sont des fermés d'intérieur vide. Or $E = \cup E_k$, donc si la topologie était métrisable on aurait un espace métrique complet qui est union de fermés d'intérieur vide, ce qui contredirait le théorème de Baire.*

En particulier, il existe des espaces complets qui ne vérifient pas la propriété de Baire.

Malgré le caractère non-métrisable, on a la caractérisation séquentielle des formes linéaires continues :

Proposition 5.2.10. *Soit $(E_k, \mathcal{T}_k)$ une suite croissante d'EVTLC métrisables, et $(E, \mathcal{T})$ leur limite inductive. Alors une forme linéaire T sur E est continue ssi elle est séquentiellement continue.*

Proof. Si T est une forme linéaire séquentiellement continue, comme les $(E_k, \mathcal{T}_k)$ sont métrisables, la restriction de T à E_k est continue pour tout k, et donc T est continue sur $(E, \mathcal{T})$. □

On peut alors adapter le théorème de Banach-Steinhaus aux limites inductives d'espaces de Fréchet :

Proposition 5.2.11. *Soit $(E, \mathcal{T})$ une limite inductive d'espaces de Fréchet E_k, chacun muni d'une famille de semi-normes $\mathcal{P}_k$, et F un EVTLC pré-Fréchet dont la topologie est définie par une famille Q de semi-normes. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F telle que*

$$\forall q \in Q, \ \ \forall x \in E, \quad \sup_i q(T_i(x)) < \infty.$$

Alors pour tout $q \in Q$ et tout k il existe $C > 0, J \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, ..., p_J \in \mathcal{P}_k$ telles que

$$\forall i \in I, \forall x \in E_k, \quad q(T_i(x)) \leqslant C \sup_{j\leqslant J} p_j(x).$$

5.2.2 Le cas des espaces $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 5.2.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des foncitons C^∞ à support compact dans Ω, muni de la topologie limite inductive induite par une suite $C^\infty(K_n)$ (munis de leur topologie d'espace de Fréchet) avec K_n une suite exhaustive de compacts de Ω.*

L'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour cette topologie, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, est appelé espace des distributions sur Ω.

On vérifie aisément que cette topologie ne dépend pas du choix de la suite exhaustive de compacts. On munira systématiquement l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ de cette topologie, sans plus de précision.

Comme application directe des théorèmes généraux précédents, on a :

Proposition 5.2.13. *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est un EVTLC séparable complet. En revanche, il n'est pas métrisable.*

5.3 Espaces de distributions

Définition 5.3.1. *Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, continue pour la topologie limite inductive.*

Une suite (T_n) de distributions converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$.

Proposition 5.3.2. *On a équivalence entre*

1. *T est une distribution sur Ω;*
2. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction de T à $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue;*
3. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*
$$|T(f)| \leqslant C p_{m,K}(f) = C \sup\{|\partial^{\mathbf{k}} f(x)|;\ \ \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d, |\mathbf{k}| \leqslant m, x \in K\}$$
pour tout $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.q. $\operatorname{supp}(f) \subset K$.
4. *T est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$;*
5. *T est séquentiellement continue en 0.*

Lemme 5.3.3. *Si T_n converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$.*

Proof. On a
$$T_n(\varphi_n) - T(\varphi) = (T_n(\varphi_n) - T_n(\varphi)) + (T_n(\varphi) - T(\varphi)).$$
Le second terme tend vers 0 par hypothèse. Pour le deuxième, soit $K \subset\subset \Omega$ un compact tel que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$. On a convergence uniforme sur K de φ_n et de toutes ses dérivées. Par théorème de Banach-Steinhaus, il existe C et α tels que
$$|T_n(f)| \leqslant C \sup_{|\mathbf{k}| \leqslant \alpha, x \in K} |\partial^\alpha f(x)|$$
pour toute fonction à support dans K et tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la convergence de φ_n vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ permet de conclure. □

5.3.1 Exemples

Pour des premiers exemples de distributions, il y a les mesures finies, mais aussi les intégrales de dérivées contre des mesures. Par exemple, $f \longrightarrow \sum f^{(j)}(j)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Si $f \in L^1_{loc}$ alors $\{f\}(\varphi) = \int f\varphi dx$ est une distribution d'ordre 0. Elle est nulle ssi $f = 0$ p.p.

La valeur principale de $1/x$, notée VP$(1/x)$ est la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$VP(1/x)(f) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

Elle a pour support $\mathbb{R}$, et est d'ordre 1.

5.3.2 Distributions à support compact

Définition 5.3.4. *Deux distributions sont égales sur un ouvert U si pour toute fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ à support dans U on a $T_1(f) = T_2(f)$. Deux distributions sont égales au voisinage de x si elles sont égales sur un voisinage ouvert de x.*

Lemme 5.3.5. *Soient T_1 et T_2 deux distributions sur Ω. Si elles sont égales au voisinage de tout point de Ω, alors elles sont égales.*

Proof. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et K le support de φ. Il existe un nombre fini d'ouverts $U_1, ...U_k$ recouvrant K tels que $T_1 = T_2$ sur chacun des U_i. Si on prend $\theta_1, ...\theta_k$ une partition lisse de l'unité subordonnée à ce recouvrement, on a $\varphi = \sum \theta_i \varphi$ et $T_1(\theta_i\varphi) = T_2(\theta_i\varphi)$, donc $T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$. □

Définition 5.3.6 (Support d'une distribution). *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le support de T est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T ets nulle. On dit que T est à support compact si son support est compact. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compact.*

Définition 5.3.7 (Ordre d'une distribution). *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que T est d'ordre inférieur à $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si pour tout compact K il existe $C > 0$ telle que*

$$|T(f)|| \leqslant C \sup_{x \in K} \sup_{|\mathbf{k}| \leqslant m} |\partial^{\mathbf{k}} f(x)|.$$

On dit qu'une distribution est d'ordre m si elle est d'ordre inférieur à m mais n'est pas d'ordre inférieur à $m - 1$.

Une telle distribution se prolonge alors en un élément du dual de $C^m_c(\Omega)$. En particulier, les distributions d'ordre 0 à support dans un compact donné sont les mesures de Radon sur ce compact.

Définition 5.3.8 (Produit $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$). *Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\psi T : \varphi \longrightarrow T(\psi\varphi)$ définit une distribution à support compact (dont le support est inclus dans le support de ψ).*

Proposition 5.3.9. *Les distributions à support compact sont d'ordre fini.*

On peut donc voir $\mathcal{E}'(\Omega)$ comme l'union des duaux des espaces $C^m_c(\Omega)$.

Proof. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 sur un voisinage du support de T. Soit $K' = \operatorname{supp} \psi$, K un compact de Ω et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\varphi = (1-\psi)\varphi + \psi\varphi$$

et comme $(1-\psi)\varphi$ est à support dans le complémentaire du support de T, et que $\operatorname{supp}(\psi\varphi) \subset K'$, on a pour des constantes α et $C_{K'}$

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= T(\psi\varphi) \\ &\leqslant C_{K'} \sup_{|\mathbf{k} \leqslant \alpha} ||\partial^{\mathbf{k}}(\psi\varphi)||_\infty \\ &\leqslant C'_{K'} \sup_{|\mathbf{k} \leqslant \alpha} ||\partial^{\mathbf{k}}\varphi||_\infty \end{aligned}$$

et donc la distribution est d'ordre au plus α. □

Notez que même si une fonction est nulle dans le support d'une distribution, la valeur n'est pas forcément nulle. Par exemple, $T(\varphi) = \varphi'(0)$ a pour support $\{0\}$, mais elle n'est pas nulle sur toutes les fonctions nulles en 0.

Proposition 5.3.10. *Soit T une distribution sur Ω d'ordre inférieur à m, et φ nulle sur le support de T, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur à m. Alors $T(\varphi) = 0$.*

Proof. Soit $K = K' \cap \operatorname{supp} T$, où K' est un voisinage compact de $\operatorname{supp} \varphi$. Soit $\psi_n = \mathbb{1}_{K_n} * \rho(n\cdot)$ où ρ est C^∞ à support dans $B(0,1)$ et d'intégrale 1, et $K_n := \{x \in \Omega;\ d(x, K) \leqslant 2/n\}$. On a $\psi_n(x) = 1$ si $d(x, K) \leqslant 1/n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe une constante C telle que

$$|\partial^\alpha \psi_n| \leqslant C n^{|\alpha|}$$

pour tout n, avec C une constante uniforme. Par définition du support de T on a $T(\varphi) = T(\psi_n\varphi)$, et comme T est d'ordre m, il existe $M > 0$ telle que

$$|T(\psi_n\varphi)| \leqslant M \sup_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha(\psi_n\varphi)(x)|.$$

Comem le support de ψ_n est de diamètre d'ordre n^{-1}, pour tout $x \in \operatorname{supp}(\psi_n\varphi)$ on a

$$|\partial^\beta\varphi(x)| \leqslant C|x-a|^{m+1-|\beta|} \leqslant C n^{|\beta|-m-1}.$$

Par formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\psi_n\varphi) &= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\psi_n \partial^\beta\varphi \\ &\leqslant C \sum n^{|\alpha|-|\beta|} n^{|\beta|-m-1}. \end{aligned}$$

D'où $\sup |\partial^\alpha(\psi_n\varphi)| \leqslant C n^{|\alpha|-m-1}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $T(\varphi) = 0$. □

Proposition 5.3.11. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si φ et toutes ses dérivées sont nulles sur le support de T, alors $T(\varphi) = 0$.*

Proof. Soit K_n une suite exhaustive de compacts, et ψ_n une suite de foncitons lisses à support compact, valant 1 sur K_n. $\psi_n T$ est une distribution à support compact, donc d'ordre fini. En appliquant la proposition précédente, on a donc $\psi_n T(\varphi) = 0$ car φ et toutes ses dérivées sont nulles sur le support de cette distribution. Mais comme pour n assez grand $\psi_n\varphi = \varphi$, on en déduit que $T(\varphi) = 0$. □

5.4 Opérations sur les distributions

5.4.1 Dérivation

Définition 5.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. La dérivée d'ordre α de T est*

$$\partial^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi).$$

Cette définition est en accord avec la formule d'intégration par parties. En particulier, on peut définir les dérivées d'une fonction $f \in L^1_{loc}$ comme les dérivées de la distribution $\{f\}$. Mais cette définition ne donne pas une dérivée au sens classique, et l'objet ainsi défini peut ne pas être représentable par une fonction.

Proposition 5.4.2. *Si T_n converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\partial^\alpha T_n$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Exemples :
La dérivée de la mesure de Dirac est $\partial^\alpha \delta_a(\varphi) = (-1)^\alpha \partial^\alpha \varphi(a)$.
On a $x\delta_0' = -\delta_0$
La dérivée de la fonciton de Heaviside $H(x) = \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}$ est δ_0.
La distribution $VP(1/x)$ est la dérivée de la fonction $x \longrightarrow \log|x|$ (vu en TD).
Comme conséquence de la formule de Stoke,s la dérivée de $\mathbb{1}_\omega$ (vu comme élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est

$$\partial_j(\mathbb{1}_\Omega) = -n_j \sigma$$

où σ est la mesure de bord de Ω, vu comme distribution à support dans $\partial\Omega$ et n la normale sortante.

Pour étudier les liens entre dérivation, convolution et distributions, on s'appuiera sur els deux résultats suivants, qu'on admettra :

Proposition 5.4.3 (Dérivation et distributions). *Soit K un comapct inclus dans Ω. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$ telle que $\forall y \in \mathbb{R}^p$ la fonciton $f(\cdot, y)$ soit à support dans K. Alors la fonction*

$$F : y \longrightarrow T(f(\cdot, y))$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^p$, et de plus $\forall \alpha, y_0$ on a

$$\partial_y^\alpha F(y_0) = T(\partial_y^\alpha f(\cdot, y_0)).$$

Proposition 5.4.4 (Intégration et distributions). *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^p)$. Alors*

$$\int T(f(\cdot, y))dy = T\left(\int f(\cdot, y)dy\right).$$

Comme corollaire de la Proposition 5.4.3, on a la formule de Leibniz pour le produit d'une distribution et d'une fonction lisse:

Corollaire 5.4.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a*

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta T$$

où $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_1^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

5.4.2 Convolution

Définition 5.4.6 (Produit de convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$)**.** *Si T est une distribution et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, leur convolution est la fonction*

$$T * \varphi(x) := T(\varphi(x - \cdot)).$$

On vérifie immédiatement que cette définition est compatible avec la convolution usuelle.

Proposition 5.4.7. *Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $T * \varphi$ est C^∞ et*

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi).$$

En particulier, si T est à support compact, alors $T * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Proof. Tout d'abord

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha T) * \varphi(x) &= (\partial^\alpha T)(\varphi(x - \cdot)) \\ &= (-1)^\alpha T(\partial^\alpha(\varphi(x - \cdot))) \\ &= T((\partial^\alpha \varphi)(x - \cdot)) \\ &= T * (\partial^\alpha \varphi).\end{aligned}$$

Ensuite, soit $a \in \mathbb{R}^d$, et montrons que $T * \varphi$ est lisse sur $B(a, 1)$. Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $g = 1$ sur $B(a, 1)$. Alors

$$(x, y) \longrightarrow g(x)\varphi(x - y)$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et à support dans $\text{supp}(g) \times (\text{supp}(g) - \text{supp}(\varphi))$. Par la Proposition 5.4.3, on a le caractère C^∞ de

$$F : x \longrightarrow T(g(x)\varphi(x - \cdot))$$

et la formule

$$\partial^\alpha T(g(x)\varphi(x - \cdot)) = T\left(\partial^\alpha (g(x)\varphi(x - \cdot))\right).$$

Comme F coincide avec $T * \varphi$ sur $B(a, 1)$, on conclut. □

Corollaire 5.4.8. *Si ρ_ε est une suite régularisante, alors $T * \rho_\varepsilon$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Proof. Pour tout $\varphi, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, en notant $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, on a comme conséquence de la Proposition 5.4.4

$$\int (T * \varphi)(x) g(x) dx = T(\check{\varphi} * g)$$

où le terme de droite utilise la convolution usuelle des fonctions. A TERMINER □

En particulier, l'ensemble des fonctions C^∞ est dense dans l'ensemble des distributions.

Définition 5.4.9 (Produit de convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}$)**.** *Si T est une distribution et S une distribution a support compact, leur convolution est la distribution $T * S$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ on a*

$$T * S(\varphi) := T(\check{S} * \varphi)$$

où $\check{S}$ est la distribution définie par $\check{S}(\psi) = S(\check{\psi})$, $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$.

Théorème 5.4.10. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a*

$$\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S).$$

5.4.3 Preuve de la Proposition 5.4.7

5.4.4 Distributions tempérées

Définition 5.4.11 (Espace de Schwartz). *L'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est l'ensemble des fonctions C^∞ telles que pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$ on ait*

$$\sup_{|\alpha|\leqslant k} \sup_x \langle x\rangle^\ell |\partial^\alpha f(x)| < \infty$$

avec $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$.

Cet espace est stable par dérivation, et multiplication avec un polynome. Il contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, mais aussi les fonctions de la forme $P(x)\exp(-a|x|^2)$ avec P un polynôme.

L'espace de Schwartz est naturellement muni de la topologie induite par les semi-normes

$$p_{k,\ell}(f) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_x \langle x\rangle^\ell |\partial^\alpha f(x)|.$$

Pour ces semi-normes, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet.

Proposition 5.4.12. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 5.4.13. *Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $T * \varphi$ est bien définie, et appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 5.4.14. *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (muni de la structure d'espace de Fréchet décrite plus haut), c'est à dire une forme linéaire telle que il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telles que*

$$|T(\varphi)| \leqslant C p_{k,\ell}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 5.4.1. *Si f est dans L^p (pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$), ou si elle est continue à croissance polynomiale, alors $\{f\}$ est une distribution tempérée. Mais ce n'est pas le cas pour $x \longrightarrow e^x$ sur $\mathbb{R}$.*

Si (a_k) est à croissance polynomiale, alors $\sum a_k \delta_k$ est une distribution tempérée.

Proposition 5.4.15. *Si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $S * \varphi(x) := S(\varphi(x - \cdot))$ est bien définie, et appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

5.5 Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels

A un opérateur différentiel de la forme $\sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha \partial^\alpha$, on peut associer le polynome $\sum a_\alpha X^\alpha$, qu'on appelle symbole de l'opérateur différentiel. Dorénavent on notera $P(\partial)$ l'opérateur différentiel ainsi associé au polynôme.

Comme exemples à garder en tête, on a le Laplacien Δ, qui correspond à $P(x) = \sum x_i^2$, mais aussi l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta$. On peut aussi considérer des coefficients qui sont des fonctions de x pour définir de sopérateurs différentiels comme l'opérateur de transport, mais on ne considèrera pas ce cas ici.

Pour résoudre une EDP de la forme $P(\partial)f = g$, on peut chercher ce qu'on appelle une solution au sens des distributions (ou au sens faible), c'est à dire une distribution T telle que

$$\sum_{\alpha} a_\alpha \partial^\alpha T(\varphi) = \int g\varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Définition 5.5.1. *Une solution fondamentale de $P(\partial)$ est une distribution T telle que $P(\partial)T = \delta_0$.*

Ces solutions peuvent ne pas être uniques. Par exemple, si $a_0 = 0$ on peut ajouter une constante.

Théorème 5.5.2. *Soit P un polynôme et T une solution fondamentale de $P(\partial)$. Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $T * S$ est une solution au sens des distributions de $P(\partial f) = S$.*

Cette solution peut ne pas être l'unique solution de l'EDP.

Proof. $\square$

Comme exemples de solutions fondamentales, $E(x) = |x|/2$ est une solution fondamentale de $f'' = \delta_0$ sur $\mathbb{R}$, $x \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\log|x|$ est une solution fondamentale du Laplacien sur $\mathbb{R}^2$, et $x \longrightarrow c_d^{-1}|x|^{2-d}$ avec $c_d = (d-2)|\mathbb{S}^{d-1}|$ est une solution fondamentale du Laplacien sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $d \geqslant 3$.

Chapter 6

Transformation de Fourier

6.1 Transformation de Fourier sur L^1

Définition 6.1.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, à valeurs réelles ou complexes. Sa transformée de Fourier, notée $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$) est la fonction à valeurs complexes définie par*

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} f(x) dx.$$

Cette notion a déjà été vue dans le cours d'Intégration et Probabilités, sous le nom de fonction caractéristique. Dans la litérature, il y a des différences de choix de conventions ($\exp(2i\pi x \cdot y)$ au lieu de $\exp(ix \cdot y)$, ou normaliser par $(2\pi)^{-d/2}$), qui mènent à des différences cosmétiques dans les énoncés de certains théorèmes.

Lemme 6.1.2. *Si $f \in L^1$ alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ et $||\hat{f}||_\infty \leqslant ||f||_1$.*

Proof. La deuxième partie est immédiate. Pour la première, connue sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue, on commence par le cas où f est l'indicatrice d'un pavé (calcul direct), et on étend ensuite au cas général par approximation dans L^1, en commençant par $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Lemme 6.1.3. *Soit $f, g \in L^1$. Alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.*

Proof. On a

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(y) &= \int e^{iy \cdot z} \int f(x) g(z-x) dx dz \\ &\int e^{iy \cdot x} f(x) \int e^{iy \cdot (z-x)} g(z-x) dz dx \\ &= \hat{f}(y)\hat{g}(y),\end{aligned}$$

où on a utilisé un changement de variable et le théorème de Fubini. $\square$

Proposition 6.1.4. *Soit $f \in L^1$, $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On a :*

1. *si $\langle x \rangle^k f \in L^1$ alors $\hat{f} \in C^k$ et pour tout $|\alpha| \leqslant k$ on a $\mathcal{F}(x^\alpha f)(y) = (i\partial_y)^\alpha (\mathcal{F}(f))(y)$.*
2. *si $f \in C^k$ et $\partial^\alpha f \in L^1$ pour tout $|\alpha| \leqslant k$ alors $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f)(y) = (iy)^\alpha \mathcal{F}(f)(y)$.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\widehat{f(\lambda \cdot)} = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1} \cdot)$*

4. *Si* $\tau_a f(x) = f(x+a)$, *alors* $\widehat{\tau_a f}(y) = e^{-ia\cdot y}\hat{f}(y)$.

5. $\mathcal{F}(e^{ia\cdot x}f)(y) = \tau_a \mathcal{F}(f)(y)$.

Les deux premières parties disent que la transformation de Fourier échange régularité et décroissance polynomiale à l'infini.

Exemple 6.1.1. 1. *La transformée de Fourier de* $x \longrightarrow \mathbb{1}[-a,a](x)$ *est* $y \longrightarrow 2\sin(ay)/y$. *A noter que ce n'est pas une fonction* L^1.

2. *Si* A *est une matrice symétrique définie positive, la transformée de Fourier de* $x \longrightarrow \exp(-\langle A^{-1}x, x\rangle/2)$ *est* $(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(A)}\exp(-\langle Ay, y\rangle/2)$.

Proof. En diagonalisant A et en faisant le changement de variable associé, on se ramène au cas $d = 1$. Soit $\lambda > 0$ et $f_\lambda(x) = \exp(-\lambda x^2/2)$. Alors $f'_\lambda = -\lambda x f_\lambda$, donc $iy\hat{f}_\lambda(y) = -i\lambda \hat{f}'_\lambda(y)$. On résoud alors l'équation différentielle, en utilisant $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$, pour conclure. □

Théorème 6.1.5 (Formule d'inversion de Fourier). *Soit* $f \in L^1$ *telle que* $\hat{f} \in L^1$. *Alors pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *on a*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-ix\cdot y}\hat{f}(y)dy.$$

Dans la suite, on notera $\bar{\mathcal{F}}(f)(x) = \int e^{-ix\cdot y}f(y)dy$.

Proof. Il serait naturel d'écrire la formule comme une intégrale double, mais on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini sous ces hypothèses. On étudie à la place

$$I_\varepsilon(x) := (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-z)\cdot y}e^{-\varepsilon|y|^2/2}f(z)dydz$$

pour laquelle le théorème de Fubini s'applique, et on fera ensuite tendre ε vers 0. Si on commence par intégrer en z, on a

$$I_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y}e^{-\varepsilon|y|^2/2}\hat{f}(y)dy,$$

et par théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y}\hat{f}(y)dy.$$

Si on intègre d'abord apr rapport à y, cela revient au calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne, qu'on a déjà vu. On a alors

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}}\int f(z)\exp(-|x-z|^2/(2\varepsilon))dz$$

et on reconnait la convolution avec un noyau Gaussien de variance ε. On a bien $I_\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$, ce qui conclut la preuve. □

On peut alors utiliser la transformation de Fourier pour résoudre des EDP. Ce qui suit est formel, mais peut être adapté à des situations concrètes. Si on considère l'équation

$$P(\partial)f = g$$

avec P un polynôme et $g \in L^1$, en prenant la transformée de Fourier on tome sur l'équation

$$P(iy)\hat{f}(y) = \hat{g}(y).$$

On peut chercher à résoudre l'équation en prenant la transformée de Fourier inverse de $\frac{\hat{g}(y)}{P(iy)}$.

Dans le cas de l'équation de Poisson $\Delta f = g$, on voit que cela revient à calculer la transformer de Fourier inverse de $-1/|y|^2$, puis à convoler avec g. En dimension 3 (pour simplifier), on a (en passant en coordonnées sphériques)

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}\left(-\frac{1}{|y|^2}\right)(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{-ix\cdot y}}{|y|^2}dy \\
&= 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{e^{-i|x|r\cos(\theta)}}{r^2}\sin(\theta)r^2 d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{-i|x|ru}dudr \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{ir|x|}\left(e^{ir|x|} - e^{-ir|x|}\right) dr \\
&= 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(r|x|)}{r|x|}dr \\
&= \frac{2\pi^2}{|x|},
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'intégrale de Dirichlet $\int_0^\infty (\sin(v)/v)dv = \pi/2$. A la constant $(2\pi)^{-3}$ (de la formule d'inversion de Fourier en dimension 3), on retrouve la solution fondamentale du Laplacien.

Pour l'équation de la chaleur

$$\partial_t f - \frac{1}{2}\Delta f = 0$$

si on prend la transformée de Fourier uniquement en espace, en notant $f_t = f(t,\cdot)$ on a l'équation

$$\partial_t \hat{f}_(y) + \frac{|y|^2}{2}\hat{f}_t(y)$$

et donc $\hat{f}_t(y) = \hat{f}_0(y)\exp(-t|y|^2/2)$. Comme $\exp(-t|y|^2/2)$ ets la transformée de Fourier de $(2\pi t)^{-d/2}\exp(-|y|^2/(2t))$ et que la transformée de Fourier échange convolution et produit, on trouve la formule

$$f(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int f(0,y)\exp(-|x-y|^2/(2t))dy.$$

Dans le cadre L^1, l'espace d'arrivée est peu clair, et on a du mal à identifier les fonctions sur lesquelles on peut faire l'inversion. Il est donc naturel de chercher un cadre dans lequel la transformée de Fourier est bijective.

6.2 Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz et les distributions tempérées

Théorème 6.2.1. *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, d'inverse $(2\pi)^{-d}\bar{\mathcal{F}}$.*

Proof. La formule

$$(iy)^\alpha (i\partial_y)^\beta \hat{f}(y) = \int e^{-ix\cdot y} \partial_x^\alpha (x^\beta f)(x) dx$$

permet de voir que l'image d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par la transofrmée de Fourier appatient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, comme $\hat{f}$ est à décroissance rapide et continue, elle appartient aussi à L^1, et on peut appliquer le théorème d'inversion pour conclure. □

Théorème 6.2.2 (Formule de Parseval). *Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\int f_1(y)\hat{f}_2(y)dy = \int \hat{f}_1(y) f_2(y) dy;$$

$$\int f_1(y) f_2\bar{(}y) dy = (2\pi)^{-d} \int \hat{f}_1(y)\overline{\hat{f}_2(y)}dy.$$

Proof. En appliquant le théorme de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int f_1(y)\hat{f}_2(y)dy &= \int_y \int_x e^{-ix\cdot y} f_1(x) f_2(y)) dx dy \\
&= \int_x \int_y e^{-ix\cdot y} f_1(x) f_2(y)) dy dx \\
&= \int \hat{f}_1(x) f_2(x) dx.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième assertion, posons $g = (2\pi)^{-d}\overline{\hat{f}_2}$, de sorte que $\hat{g} = \overline{f_2}$ en appliquant la formule d'inversion. En appliquant la première partie, on a

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}f_1(y)\overline{\hat{f}_2(y)}dy &= \int \hat{f}_1 g dy \\
&= \int f_1 \hat{g} dy \\
&= \int f_1(y)\overline{f_2(y)}dy.
\end{aligned}$$

□

Définition 6.2.3 (Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$). *Soit $S \in \mathcal{S}'$ une distribution tempérée. Sa transformée de Fourier, notée $\hat{S}$ ou $\mathcal{F}S$, est définie par dualité comme*

$$\hat{S}(\varphi) = S(\hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Cette définition coincide avec la définition dans L^1 pour les fonctions appropriées. En effet, on vérifie aisément que $\{\hat{f}\} = \mathcal{F}\{f\}$.

Théorème 6.2.4. *La transformée de Fourier est un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, et son inverse est $(2\pi)^{-d}\bar{\mathcal{F}}$.*

Proof. C'est une conséquence de la formule d'inversion et de la définition par dualité :

$$(2\pi)^{-d}\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}S(\varphi) = (2\pi)^{-d}S(\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\varphi) = S(\varphi)$$

et de même $(2\pi)^{-d}\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}S = S$. □

Exemple 6.2.1. *La transformée de Fourier de la masse de Dirac vérifie $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. Cette formule est compatible avec la convolution.*

La transformée de Fourier de x^α (avec $\alpha \in \mathbb{N}^d$) est $(2\pi)^d i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0$.

Dans les deux cas, ça ne découle pas de la définition intégrale de la transformation de Fourier, car on n'est pas dans un cadre L^1.

Proposition 6.2.5. *Si S_n converge vers S dans $\mathcal{S}'$ alors $\mathcal{F}S_n$ converge vers $\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'$.*

Proof. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ on a

$$\mathcal{F}S_n(\varphi) = S_n(\mathcal{F}\varphi) \longrightarrow S(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}S(\varphi).$$

□

Proposition 6.2.6 (Opérations et transformation de Fourier sur les distributions tempérées).

1. *$\mathcal{F}(\partial_k S) = iy_k\mathcal{F}S$;*
2. *$\mathcal{F}(x_k S) = i\partial_k\mathcal{F}S$;*
3. *Si τ_a est la translation de vecteur $a \in \mathbb{R}^d$, alors $\mathcal{F}(S \circ \tau_a) = e^{ia\cdot y}\mathcal{F}S$;*
4. *$\mathcal{F}(e^{ia\cdot x}S) = (\mathcal{F}S) \circ \tau_a$.*

Proposition 6.2.7. *Toute distribution tempérée harmonique (c'est à dire solution de $\Delta S = 0$) est une fonction polynomiale. En particulier, toute distribution harmonique bornée est constante.*

Proof. Il a éé vu en TD que toute distribution dont le support est $\{0\}$ est une combinaison linéaire finie de δ_0 et de ses dérivées.

Si $\Delta S = 0$, alors en rpenant la transformée de Fourier on a $-|y|^2\mathcal{F}S = 0$, donc $\mathcal{F}S$ est une distribution dont le support est $\{0\}$. Donc elle est de la forme

$$\mathcal{F}S = \sum a_\alpha \partial^\alpha \delta_0.$$

Comme $\mathcal{F}(\partial_\alpha\delta_0) = (iy)^\alpha$, par inversion de Fourier on a

$$S = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum a_\alpha(-iy)^\alpha.$$

□

6.3 Transformation de Fourier dans L^2

Théorème 6.3.1 (Formule de Plancherel)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors sa transformée de Fourier est bien définie dans L^2, et $||f||_2 = (2\pi)^{-d/2}||\hat{f}||_2$.*

Elle vérifie également la formule de Plancherel, et la formule d'inversion de Fourier.

Proof. D'après la formule de Parseval, la transformée de Fourier vérifie ces propriétés pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Comme cet espace est dense dans L^2, pour la norme L^2, on peut étendre la formule de Parseval à L^2 par approximation de $f \in L^2$ par une suite (f_n) de $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$, en utilisant la propriété de Cauchy dans L^2 pour justifier la convergence de $\mathcal{F}f_n$. □

Exemple 6.3.1. *Comme la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ est $2\sin(ay)/y$, on a*

$$\int \left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 dy = \pi.$$

Proposition 6.3.2 (Principe d'incertitude)**.** *Soit $f \in L^2$ telle que xf et $\nabla f \in L^2$. Alors $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$||(x - x_0)f||_2||(y - y_0)\hat{f}||_2 \geqslant \frac{d}{2}(2\pi)^{d/2}||f||_2^2.$$

Proof. Sans perdre de généralité, on suppose $x_0 = y_0 = 0$. Alors

$$\int f(x)x \cdot \nabla f(x)dx = \frac{1}{2}\int x \cdot \nabla(f^2)dx = -\frac{d}{2}\int f^2 dx.$$

D'où $||f||_2^2 \leqslant 2d^{-1}||xf||_2||\nabla f||_2$. Or

$$||\nabla f||_2^2 = \sum ||\partial_i f||_2^2 = \sum_i (2\pi)^{-d}||\hat{\partial_i f}||_2^2 = (2\pi)^{-d}||y\hat{f}||_2^2,$$

ce qui conclut la preuve. □

Théorème 6.3.3 (Hausdorff-Young)**.** *Soit $p \in [1, 2]$, et q son exposant dual. La transformée de Fourier est un opérateur continu de L^p dans L^q, et de plus*

$$||\mathcal{F}||_{p\to q} \leqslant (2\pi)^{-d/q}.$$

Proof. On a

$$||\mathcal{F}||_{1\to\infty} \leqslant 1; \quad ||\mathcal{F}||_{2\to 2} = (2\pi)^{-d/2}.$$

Par application du théorème de Riesz-Thorin, on en déduit que pour $p \in [1, 2]$ et $q = (p - 1)/p$ on a

$$||\mathcal{F}||_{p\to q} \leqslant (2\pi)^{-d/q}.$$

□

Cette borne sur la norme opérateur n'est pas la borne optimale (mais le calcul exact de la norme suit un argument très différent [1, 2]).

6.4 Formule sommatoire de Poisson

Théorème 6.4.1 (Formule sommatoire de Poisson). *La distribution*

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$$

appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}.$$

Lemme 6.4.2. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et S un distribution sur $\mathbb{R}$ telle que $(x-a)S = 0$. Alors S est de la forme $C\delta_a$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Proof. Exercice, en utilisant le fait (vu en TD) que toute distribution dont le support est $\{a\}$ est une combinaison linéaire finie de δ_a et de ses dérivées. □

Preuve de la formule sommatoire de Poisson. Si on note τ_1 l'opérateur de translation par 1, on a $T = T \circ \tau_1$, et donc

$$\mathcal{F}T(\xi) = \mathcal{F}(T\circ\tau_1)(\xi) = e^{i\xi}\mathcal{F}T(\xi)$$

et donc $\mathcal{F}T$ est à support dans $2\pi\mathbb{Z}$. Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(g) \subset (-\pi/4, \pi/4)$ et $g = 1$ sur $(-\pi/8, \pi/8)$. On a

$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(\cdot - 2k\pi)\mathcal{F}T.$$

Or

$$0 = (e^{i\xi} - 1)g(\xi - 2k\pi)\mathcal{F}T = (\xi - 2k\pi)\frac{e^{i\xi}-1}{\xi - 2k\pi} g(\xi - 2k\pi)\mathcal{F}T.$$

En appliquant le Lemme 6.4.2, on en déduit que il existe une constante C_k telle que

$$\frac{e^{i\xi}-1}{\xi - 2k\pi} g(\xi - 2k\pi)\mathcal{F}T = C_k\delta_{2k\pi}.$$

En considérant le comportement de cette identité lorsque ξ tend vers $2k\pi$, puis en sommant sur k, on obtient

$$\mathcal{F}T = \sum_k -iC_k\delta_{2k\pi}.$$

De plus, comme $e^{2i\pi\cdot}T = T$, on a $\mathcal{F}T \circ \tau_{2\pi} = \mathcal{F}T$, et donc C_k ne dépend pas de k. Notons $c = -iC_1$, qu'il nous reste à calculer. On a pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$

$$c\sum f(2k\pi + y) = \mathcal{F}T(f(\cdot + y)) = T(\mathcal{F}f(\cdot + y)) = \sum_k e^{iky}\mathcal{F}f(k).$$

En intégrant sur $[0, 2\pi]$, on obtient

$$\begin{aligned} c\int_{\mathbb{R}} f(y)dy &= \sum_k \int_0^{2\pi} \mathcal{F}f(k)e^{iky}dy \\ &= 2\pi\mathcal{F}f(0) \\ &= 2\pi\int f(y)dy \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de convergence dominée pour échanger série et intégrale. On en déduit donc que $c = 2\pi$, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 6.4.3. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $a > 0$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+na) = \frac{1}{a}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi\ell/a)e^{-2it\pi\ell/a}.$$

Proof. Pour t fixé, remplacer f par $f(\cdot - t)$ revient à faire une translation, ce qui devient la multiplication par e^{-ity} sur la transformée de Fourier. On peut donc supposer sans perdre de généralité que $t = 0$. De plus, remplacer f par $f(a\cdot)$ revient à remplacer $\hat{f}$ par $a^{-1}\hat{f}(\cdot/a)$, donc on peut supposer $a = 1$ sans perdre de généralité.

La formule de Poisson indique que

$$\sum \hat{f}(n) = T(\hat{f}) = \hat{T}(f) = 2\pi \sum f(2\ell\pi)$$

. Si on remplace f par $\hat{f}$, la formule d'inversion de Fourier donne bien

$$\sum_{\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{\mathbb{Z}} \hat{f}(2\ell\pi).$$

□

Théorème 6.4.4 (Théorème de Shannon-Nyquist)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ telle que* $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [-W, W]$ *avec $W > 0$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$ on a*

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{k\pi}{W}\right) \mathrm{sinc}_W\left(t - \frac{k\pi}{W}\right)$$

où $\mathrm{sinc}_W(x) = \sin(Wx)/$.

Proof. On fait la preuve pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour simplifier en ne devant pas faire trop d'efforts pour démontrer les convergences des sommes. On prend aussi $W = 1/2$ pour simplifier les notations.

Comme $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [-1/2, 1/2]$, en utilisant le corollaire de la formule de Poisson on a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(y) \sum \hat{f}(y+k) \\
&= \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(y) \sum_n \hat{\hat{f}}(2n\pi)e^{-2in\pi y} \\
&= 2\pi\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t) \sum_n f(-2n\pi)e^{-2in\pi y} \\
&= 2\pi\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t) \sum_n f(2n\pi)e^{2in\pi y}
\end{aligned}$$

Par formule d'inversion,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{-iyt}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(y)e^{-iyt}dy \\
&= \sum_n f(2n\pi)\int_{-1/2}^{1/2} e^{iy(2n\pi - t)}dy \\
&= \sum_n f(2n\pi)\,\mathrm{sinc}_{1/2}(t - 2n\pi).
\end{aligned}$$

$\square$

A noter que si on échantillone plus souvent, on peut remplacer l'indicatrice utilisée dans la preuve par une fonction φ lisse. Les poids dans la formule d'échnatillonage sont alors donnés par la transformée de Fourier de φ, et sont donc à décroissance rapide.

Pour conclure, il faut mentionner que la transformée de Fourier peut être définie dans le cadre des foncitons sur un groupe localement compact. En particulier, la transformée de Fourier sur les groupes abéliens finis a de nombreuses applications en arithmétique, en cryptographie et en théorie de l'information.

Chapter 7

Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces de fonctions intégrables, dont les dérivées vérifient aussi des propriétés d'intégrabilité.

7.1 Espaces de Sobolev en dimension 1

On commence par le cas de la dimension 1. Il est particulier, car la formule $u(x) - u(y) = \int_x^y u'(t)dt$ fait sens lorsque u' est intégrable, alors que son analogue en dimension supérieure pas forcément (les segments sont de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$ lorsque $d \geqslant 2$).

Dans cette section, I sera un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. En général (mais pas toujours), I pourra être non-borné.

Définition 7.1.1. *Soit $p \in [1, +\infty]$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est*

$$W^{1,p}(I) := \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \ t.q. \ \int_I u\varphi' = -\int g\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

On peut remplacer $C_c^1(I)$ par $\mathcal{D}(I)$ par densité. C'est l'ensemble des fonctions dont la dérivée au sens des distributions peut être représentée par une fonction de L^p. Cette fonction est unique dans L^p, et on pose $u' = g$.

On munit l'espace $W^{1,p}$ de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(I)} := ||u||_{L^p(I)} + ||u'||_{L^p(I)}.$$

Lorsque $p = 2$, on note $W^{1,p} = H^1$, et on le munit du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_I uv + u'v'.$$

Lemme 7.1.2. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $W^{1,p}(I)$. Si (u_n) converge vers u dans L^p et (u_n') converge vers v dans L^p, alors $u \in W^{1,p}$, $u' = v$, et (u_n) converge vers u dans $W^{1,p}$.*

Proof. Soit $w \in \mathcal{D}(I)$. Comme $w' \in L^q$, on a

$$\int u_n w' \longrightarrow \int uw'.$$

Or

$$\int u_n' w \longrightarrow \int vw \text{ et } \int u_n' w = -\int u_n w'.$$

Donc $\int uw' = -\int vw$ pour tout $w \in \mathcal{D}(I)$. On a donc $u \in W^{1,p}$ et $v = u'$ par définition, et la convergence suit. $\square$

Théorème 7.1.3. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(W^{1,p}(I), ||\cdot||_{W^{1,p}})$ est un espace de Banach. Il est réflexif si $1 < p < \infty$. Il est séparable si $1 \leqslant p < \infty$. L'espace $H^1(I)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Proof. Exercice. $\square$

Lemme 7.1.4. *Si $u \in W^{1,p}$ et $\varphi \in C_c^1(I)$ alors $u\varphi \in W^{1,p}(I)$ et $(u\varphi)' = u'\varphi + u\varphi'$.*

Proof. Soit $g \in C_c^1(I)$. On a

$$\begin{aligned}\int u\varphi g' &= \int u[(g\varphi)' - g\varphi'] \\ &= -\int u'(g\varphi + g\varphi') \qquad\qquad = -\int (u\varphi' + u'\varphi)g.\end{aligned}$$

$\square$

Comme $d = 1$, on va pouvoir directement identifier les fonctions $W^{1,p}$ avec les primitives d'éléments de L^p.

Théorème 7.1.5. *Soit $u \in W^{1,p}(I)$. Alors elle admet un représenant dans $C(I)$, qu'on notera encore u, et qui vérifie*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)dt.$$

Si I est borné, ce représentant se prolonge par continuité à $\bar{I}$.

On verra plus tard que même si I est non borné, ce représentant s'étend par continuité, car il a une limite nulle à l'infini.

Dans la suite de cette section, on supposera sans perdre de généralité que on travaille avec ce représentant continu.

Proof. Soit $x_0 \in I$ et $v(x) := \int_{x_0}^x u'(t)dt$, qui est bien définie. Soit $\varphi \in C_c^1(I)$ et $[a, b] \subset I$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [a, b]$. Alors, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int v\varphi' &= \int_a^b v\varphi' \\ &= -\int_a^{x_0} \left(\int_{x_0}^x u'(t)dt\right) \varphi'(x)dx + \int_{x_0}^b \left(\int_{x_0}^x u'(t)dt\right) \varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^{x_0} \left(\int_a^t \varphi'(x)dx\right) u'(t)dt + \int_{x_0}^b \left(\int_t^b \varphi'(x)dx\right) u'(t)dt \\ &= -\int_I u'\varphi = \int u\varphi'.\end{aligned}$$

Donc u et v représentent la même forme linéaire en φ'. Donc $\{u - v\}' = 0$ au sens des distributions, d'où $u - v$ est une constante. On pourra montrer en exercice le lemme général que si T est une distribution sur I avec $\partial_x T = 0$, alors T est représentée par une fonction constante. $\square$

Proposition 7.1.6 (Continuité). *Soit $u \in W^{1,p}$, et soit q telle que $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

Si $p > 1$, alors

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \int_x^y |u'| \leqslant ||u'||_p |x - y|^{1/q}$$

i.e. u est $(1 - p^{-1})$-Hölder continue.

Si $p = 1$ alors $|u(x) - u(y)| \leqslant w(|x - y|)$ où $w(t) = \sup_{|A| \leqslant t} \int_A u'$. Donc u est uniformément continue, mais son module de continuité n'est pas contrôlé uniquement par $||u||_{W^{1,p}}$.

En particulier, lorsque $p > 1$, on va pouvoir utiliser le théorème d'Arzela-Ascoli.

Proof. C'est une conséquence immédiate de la formule pour le représentant continu, et de l'inégalité de Hölder lorsque $p > 1$. $\square$

Proposition 7.1.7. *Soit $u \in L^p$ avec $p > 1$ (possiblement $p = \infty$), et q l'exposant dual ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Alors on a équivalence entre*

1. *$u \in W^{1,p}$;*
2. *il existe $C > 0$ telle que $\left|\int_I u\varphi'\right| \leqslant C||\varphi||_{L^q}$ pour tout $\varphi \in C_c^1(I)$.*
3. *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $\omega \subset\subset I$ et $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < d(\omega, \mathbb{R}\backslash I)$ on ait*
$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leqslant C|h|.$$

Dans les deux derniers cas, on peut prendre $C = ||u'||_{L^p(I)}$. On rappelle que τ_h est l'opérateur de translation, tel que $\int \tau_h u \varphi = \int u \varphi(\cdot - h)$.

Si $p = 1$, on a toujours $1 \Rightarrow 2$ et $2 \Leftrightarrow 3$, mais on n'a pas $2 \Rightarrow 1$. Un contre-exemple est $u = \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$ sur $]-1, 1[$. Si I est borné, les fonctions qui vérifient 2 (ou 3) sont appelées fonctions à variations bornées, et sont les différences de deux fonctions croissantes bornées.

Proof. On a $1 \Rightarrow 2$ par définition, et $2 \Rightarrow 1$ car le dual de L^q est L^p (ce qui est faux si $p = 1$).

Démontrons $1 \Rightarrow 3$. On peut travailler avec le représentant continu. On a vu $|u(x) - u(y)| \leqslant \int |u'(t)|dt$, et donc

$$|\tau_h u(x) - u(x)| \leqslant |h| \int_0^1 |u'(x + th)|dt.$$

Par inégalité de Jensen,

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leqslant |h|^p \int_0^1 |u'(x + th)|^p dt.$$

Si on rpend $\omega' \subset\subset I$ tel que $\omega' + th \subset \omega$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)}^p \leqslant |h|^p \int_0^1 \int_\omega |u'(x + th)|^p dx dt \leqslant |h|^p ||u'||_{L^p(\omega')}^p.$$

Montrons 3 $\Rightarrow$ 2. Soit $\varphi \in C^1_c(I)$ et $\omega \subset\subset I$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \omega$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R}\backslash I)$. On a

$$C||\varphi||_q|h| \geqslant \left|\int (\tau_h u - u)\varphi\right| = \left|\int u(\varphi(x) - \varphi(x-h))dx\right|.$$

En divisant par h et en le faisant tendre vers 0, par théorème de convergence dominée on obtient bien

$$\left|\int u\varphi'\right| \leqslant C||\varphi||_q.$$

□

Il est parfois utile (pour utiliser la convolution ou la transformation de Fourier) d'étendre des fonctions d'un intervalle I à $\mathbb{R}$ tout entier.

Théorème 7.1.8 (Prolongement)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Il existe un opérateur linéaire $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ continu t.q. $(Pu)|_I = u$ pour tout $u \in W^{1,p}(I)$.*

Proof. Si I non-borné, on peut supposer $I =]0, +\infty[$ par un changement de variable. On peut ensuite prolonger $u \in W^{1,p}$ par continuité en 0, puis par parité ($u(-x) = u(x)$) sur $\mathbb{R}$. Cette opération est linéaire, et $||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2||u||_{W^{1,p}(I)}$.

Si I est borné, on peut supposer $I =]0, 1[$. On l'étend par parité à $]-1, 1[$, puis par symétrie ($u(1+t) = u(1-t)$) à $]-1, 2[$. En considérant $g \in C^\infty_c$ avec $\mathbb{1}_{]0,1[} \leqslant g \leqslant \mathbb{1}_{]-1/2,3/2[}$ et en posant $Pu = gu$, on obtient bien une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R})$, dont la norme est contrôlée par $||u||_{W^{1,p}(I)}$. □

Proposition 7.1.9. *Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Alors $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $(\rho * u)' = \rho * u'$.*

Proof. Exercice. □

Théorème 7.1.10. *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (pour la norme $W^{1,p}$). Plus généralement, $\{u|_I, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.*

En revanche, $\mathcal{D}(I)$ n'est pas forcément dense dans $W^{1,p}(I)$. On verra plus tard quelle est son adhérence.

Proof. On procède par troncature et régularisation par convolution. Soit η une fonction lisse telle que $\mathbb{1}_{[-1,1]} \leqslant \eta \leqslant \mathbb{1}_{]-2,2[}$ et $\eta_n(t) = \eta(t/n)$. Soit ρ_n un noyau régularisant. On pose $u_n = \eta_n(\rho_n * u)$. Par construction, $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$u_n - u = \eta_n(\rho_n * u - u) + (\eta_n - 1)u.$$

Le premier terme tend vers 0 dans L^p car produit d'une suite bornée dans L^∞ et d'une suite qui tend vers 0 dans L^p. Le second tend vers 0 dans L^p par application du théorème de convergence dominée.

Ensuite

$$u'_n - u' = n^{-1}\eta'(t/n)(\rho_n * u) + \eta_n(\rho_n * u' - u') + (\eta_n - 1)u'.$$

Les deuxième et troisième terme tendent vers 0 par le même raisonnement que précédemment, et le premier tend vers 0 dans L^p grâce au facteur n^{-1}. □

Définition 7.1.11. *Un opérateur linéaire T entre deux espaces de Banach E et F est compact si $T(B_E)$ est compact dans F (où B_E est la boule unité de E).*

Théorème 7.1.12 (Injections de Sobolev en dimension 1)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Il existe un constante C telle que pour tout $p \in [1, \infty)$ et tout $u \in W^{1,p}(I)$ on ait*

$$||u||_\infty \leqslant C||u||_{W^{1,p}(I)}.$$

Si de plus I est bornée alors

1. *Si $p > 1$ alors l'injection de $W^{1,p}(I)$ dans $C(\bar{I})$ est compacte.*

2. *L'injection de $W^{1,1}(I)$ dans $L^q(I)$ est compacte pour tout $q \in [1, +\infty)$.*

Proof. Pour la première partie, grâce au théorème de prolongement il suffit de considérer le cas où $I = \mathbb{R}$. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R})$. On a

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x} |u'| \leqslant ||u||_1$$

ce qui donne l'inégalité pour $p = 1$ et $u \in C_c^1(\mathbb{R})$. Pour $p > 1$, on a $u|u|^{p-1} \in C_c^1(\mathbb{R})$ et en calculant sa dérivée on a

$$|u(x)|^{p-1}u(x) = \int_{-\infty}^{x} pu'(t)|u|^{p-1}dt$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Holder, on obtient

$$|u(x)|^p \leqslant p||u||_p^{p-1}||u'||_p \leqslant p||u||_{W^{1,p}}^p.$$

Comme de plus $\sup p^{1/p} < \infty$ on obtient

$$||u||_\infty \leqslant C||u||_{W^{1,p}}.$$

Pour le cas général $u \in W^{1,p}$, on considère une suite u_n de $C_c^1(\mathbb{R})$ qui converge vers u dans $W^{1,p}$. D'après l'inégalité précédente, (u_n) est une suite de Cauchy dans L^∞, donc converge, et la limite est u. On en déduit l'inégalité pour tout $u \in W^{1,p}$.

Supposons maintenant I borné. La première partie est une conséquence du théorème d'Arzela-Ascoli et de la Holder-continuité qu'on a déjà démontrée. Pour la seconde partie, on va montrer que la boule unité de $W^{1,1}$ (qu'on notera B) vérifie les hypothèses du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans L^q. Soit $\omega \subset\subset I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R}\backslash I)$. On a déjà vu que

$$||\tau_h u - u||_{L^1(\omega)} \leqslant |h|||u'||_1 \leqslant |h| \ \ \forall u \in B$$

et donc

$$||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)}^q \leqslant ||\tau_h u - u||_1(2||u||_\infty)^{q-1} \leqslant C|h|$$

via l'inégalité de Sobolev. Donc B vérifie la première condition du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. Pour la seconde condition, on a

$$||u||_{L^q(I\backslash\omega)} \leqslant ||u||_\infty|I\backslash\omega|^{1/q} \leqslant C|I\backslash\omega|^{1/q} \ \ \forall u \in B$$

ce qui donne la seconde condition du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, et conclut la preuve. □

Corollaire 7.1.13. *Si I est non-borné, $p \in [1, +\infty[$ et $u \in W^{1,p}(I)$, alors*

$$\lim_{|x| \to \infty, x \in I} u(x) = 0.$$

Proof. Soit $u \in W^{1,p}(I)$. On sait qu'il existe une suite u_n de $\mathcal{D}(I)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u dans $W^{1,p}(I)$, et donc dans $L^\infty(I)$. Or toute limite de foncitons continues à support compact dans L^∞ tend vers 0 à l'infini. $\square$

Corollaire 7.1.14. *Soit $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Alors $uv \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a*

$$\int_x^y u(t)v'(t)dt = -\int_x^y u'(t)v(t)dt + u(y)v(y) - u(x)v(x).$$

Proof. Exercice $\square$

Définition 7.1.15. *Pour $p \in [1, +\infty)$, on note $W_0^{1,p}(I)$ l'adhérence de $C_c^1(I)$ dans $W^{1,p}(I)$ (munit de sa norme d'espace de Sobolev).*

Par définition $W_0^{1,p}(I)$ est un sous-espace fermé de $W^{1,p}(I)$, donc c'est un espace de Banach, et il vérifie les propriétés énoncées pour $W^{1,p}(I)$ dans le Théorème 7.1.3.

Théorème 7.1.16. *Soit $u \in W^{1,p}(I)$ (identifié à son représentant continu sur $\bar{I}$. Alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I.*

Proof. Par densité de $C_c(I)$, comme l'inégalité de Sobolev implique la convergence uniforme des représentants continus des suites convergentes dans $W^{1,p}$, les éléments de $W_0^{1,p}$ sont nuls sur ∂I.

Réciproquement, soit $u \in W_0^{1,p}$ (toujours identifié à son représentant continu). Soit G une fonction C^1 impaire sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[-1, 1]$ et telle que $G(t) = t$ sur $[-2, 2]^c$. On pose $u_n = n^{-1}G(nu)$. Par construction, $\mathrm{supp}(u_n) \subset \{x; |u(x)| \geqslant n^{-1}\}$, qui est compact. On vérifie directement (à l'aide du théorème de convergence dominée) que u_n converge vers u dans $W^{1,p}$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Proposition 7.1.17 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit I un intervalle ouvert borné. Alors il existe $C > 0$ telle que*

$$||u||_{W^{1,p}} \leqslant C||u'||_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la norme de Sobolev et la norme L^p de la dérivée définissent des normes équivalentes. C'est faux sur $W^{1,p}(I)$, à cause des fonctions constantes non-nulles.

Proof. Soit $I =]a, b[$. On a

$$|u(x)| = \int_a^x u'(t)dt \quad \forall x \in I$$

d'où $||u||_\infty \leqslant ||u'||_1$, et l'inégalité de Holder permet de conclure. $\square$

Théorème 7.1.18 (Poincaré-Wirtinger)**.** *Soit I un intervalle ouvert (possiblement non-borné) et $u \in W^{1,1}(I)$. On a $||u - \bar{u}||_\infty \leqslant ||u'||_1$, où $\bar{u} = |I|^{-1}\int_I u$.*

Proof. On considère le représentant continu de u. Par théorème des valeurs intermédiraire, il existe $x_0 \in I$ tel que $u(x_0) = \bar{u}$. Comme pour tout y on a $|u(y) - u(x_0)| \leqslant ||u'||_{L^1(I)}$, la conclusion suit. $\square$

7.2 Espaces de Sobolev en dimension supérieure

Définition 7.2.1. *Soit $p \in [1, +\infty]$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \forall i \in \{1, ..., d\} \exists g_i \in L^p(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u \partial_i \varphi = -\int g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

On peut remplacer $C_c^1(\Omega)$ par $\mathcal{D}(\Omega)$ par densité. C'est l'ensemble des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre 1 au sens des distributions peuvent être représentées par des fonctions de L^p. Ces fonctions sont uniques dans L^p, et on pose $\partial_i u = g$, et $\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_d u)^t$.

On munit l'espace $W^{1,p}$ de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(I)} := ||u||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Lorsque $p = 2$, on note $W^{1,p} = H^1$, et on le munit du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_I uv + \langle \nabla u, \nabla v.$$

Comme en dimension 1, on a

Théorème 7.2.2. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $(W^{1,p}(\Omega), || \cdot ||_{W^{1,p}})$ est un espace de Banach. Il est réflexif si $1 < p < \infty$. Il est séparable si $1 \leqslant p < \infty$. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Plus généralement, on peut définir l'espace $W^{m,p}$ des fonctions dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à m sont des éléments de L^p, c'est à dire

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tq. } |\alpha| \leqslant m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ t.q. } \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int g_\alpha \varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\}$$

Les dérivées partielles sont encore notées $\partial^\alpha u$. On peut le munir de la norme $\sum_{|\alpha| \leqslant m} ||\partial^\alpha u||_p$. L'espace $W^{m,2}$ est noté H^m, et est muni du produit scalaire naturel. Le Théorème 7.2.2 se généralise aux ordres supérieurs.

Lemme 7.2.3. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $W^{1,p}(\Omega)$. Si (u_n) converge vers u dans L^p et $(\partial_i u_n)$ converge vers v_i dans L^p pour tout $i \in \{1, ..., d\}$, alors $u \in W^{1,p}$, $\partial_i u = v_i$, et (u_n) converge vers u dans $W^{1,p}$.*

Proof. Même preuve qu'en dimension 1. □

Théorème 7.2.4 (Théorème de densité de Friedrichs)**.** *Soit Ω un ouvert, $p \in [1, +\infty)$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n|_\Omega$converge vers u dans $L^p(\Omega)$ et $\nabla u_n|_\omega$ converge vers $\nabla u|_\omega$ dans $L^p(\omega)$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$.*

On verra plus tard qu'on peut faire mieux lorsque l'ouvert est régulier.

Proof. Soit ρ_n une suite régularisante, η une fonction lisse telle que $\mathbb{1}_{B(0,1)} \leqslant \eta \leqslant \mathbb{1}_{B(0,1)}$,$\eta_n := \eta(\cdot/n)$ et $\bar{u}$ la fonction qui prolong u apr 0 sur $\mathbb{R}^d \backslash \Omega$. On vérifie à la main que $u_n := \eta_n(\rho_n * \bar{u})$ convient, en utilisant que si $\omega \subset\subset \Omega$, alors pour n assez grand $\nabla(\rho_n * \bar{u}) = \nabla u$ sur ω. □

Notons au passage que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ lorsque $p < \infty$.

Proposition 7.2.5. *Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $p > 1$ (possiblement $p = \infty$), et q l'exposant dual ($p^{-1} + q^{-1} = 1$). Alos on a équivalence entre*

1. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$;*
2. *il existe $C > 0$ telle que $\left|\int_I u\partial_i\varphi\right| \leqslant C||\varphi||_{L^q}$ pour tout $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ et $i \in \{1, ..., d\}$.*
3. *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < d(\omega, \mathbb{R}\backslash\Omega)$ on ait*
$$||\tau_h u - u||_{L^p(\omega)} \leqslant C|h|.$$

Comme en dimension 1, si $p = 1$, on a toujours $1 \Rightarrow 2$ et $2 \Leftrightarrow 3$, mais on n'a pas $2 \Rightarrow 1$.

Proof. La preuve est faite exactement comme en dimension 1, sauf pour $1 \Rightarrow 3$. Soit $u \in C_c^1(\Omega)$ et $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < d(\omega, \mathbb{R}\backslash\Omega)$. On suppose pour l'instant $p < \infty$. On a
$$|\tau_h u(x) - u(x)| \leqslant |h| \int_0^1 |\nabla u(x + th)|dt$$
et donc, par inégalité de Jensen,
$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leqslant |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt.$$
Soit $\omega' = \omega + B(0, |h|) \subset\subset \Omega$. En appliquand le théorème de Fubini on a
$$\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx \leqslant |h|^p \int_0^1 \int_\omega |\nabla u(x + th)|^p dxdt \leqslant |h|^p ||\nabla u||^p_{L^p(\omega')}.$$
On en déduit que 3 est vérifiée pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ en appliquand le théorème de densité de Friedrichs. Le cas $p = \infty$ s'obtient en passant à la limite en p. □

Théorème 7.2.6 (Prolongement)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Il existe un opérateur linéaire $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ continu t.q. $(Pu)|_\Omega = u$ pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

On pourra consulter [6, Section 5.4] pour une preuve.

Corollaire 7.2.7. *Soit Ω un ouvert régulier, $p \in [1, +\infty[$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Il existe une suite $(u_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ telle que $u_n|\Omega$ converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Proof. On considère comme précédemment une suite de troncatures $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite régularisante $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que P l'opérateur de prolongement.

Si Ω est borné, on utilise $\eta_n(Pu * \rho_n)$ pour approximer $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Si Ω est non-borné, on commence par choisir k tel que $||\eta_k u - u||_{W^{1,p}} \leqslant \varepsilon$, et on prolonge $\eta_k u$ en une fonction $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Alors $||\eta_n(v * \rho_n) - u||_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant 2\varepsilon$ pour n assez grand, ce qui permet de conclure. □

7.3 Inégalités de Sobolev

Lemme 7.3.1. *Soit* $f_1, ..., f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$*. Pour* $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$*, on pose*

$$x_{-i} := (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

et

$$f(x) := \prod_{i=1}^{d} f_i(x_{-i}).$$

Alors $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \prod_{i=1}^{d} ||f_i||_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Proof. On procède par récurrence sur d. Pour $d = 2$, c'est immédiat, en utilisant le théorème de Fubini. Supposons l'énoncé vrai pour $d \geqslant 2$, et montrons qu'il est vrai pour $d + 1$.

Soient $f_1, ...f_{d+1} \in L^d(\mathbb{R}^d)$ et $d' = d/(d-1)$. Alors $\forall x_{d+1} \in \mathbb{R}$, en appliquant l'hypothèse de récurrence on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} |f_i(x_{-i}, x_{d+1})|^{d'} dx \leqslant \prod_{i=1}^{d} ||f_i(\cdot, x_{d+1})||^{d'}_{L^d(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

En utilisant l'inégalité de Holder (avec exposants d et d') on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) dx_1 \ldots dx_d \leqslant ||f_{d+1}||_{L^d(\mathbb{R}^d)} \prod_{i=1}^{d} ||f_i(\cdot, x_{d+1})||_{L^d(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

On intègre par rapport à x_{d+1} et on utilise l'inégalité de Hölder pour conclure. $\square$

Théorème 7.3.2 (Gagliardo, Nirenberg, Sobolev)**.** *Soit* $p \in [1, d)$*, et soit* p^* *défini par la relation*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}.$$

Il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$||u||_{p^*} \leqslant C||\nabla u||_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Proof. Nous allons démontrer l'inégalité dans le cas $u \in C^1_c$, le cas général s'en déduit par densité. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$f_i(x_{-i}) := \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x_{-i}, t)| dt.$$

On a $|u(x)| \leqslant f_i(x_{-i})$, et donc

$$|u(x)|^{d/(d-1)} \leqslant \prod_{i=1}^{d} f_i(x_{-i})^{1/(d-1)}.$$

Une application du lemme précédent nous donne

$$||u||^{d/(d-1)}_{L^{d/(d-1)}} \leqslant \prod_{i=1}^{d} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_i(x_{-i}) dx_{-i} \right)^{1/(d-1)} \leqslant \prod_{i=1}^{d} ||\partial_i u||_1^{1/(d-1)}.$$

On déduit via l'inégalité géométrique que

$$||u||_{L^{d/(d-1)}} \leqslant ||\nabla u||_1,$$

ce qui nous donne le résultat pour $p = 1$ (après avoir utilisé la densité des fonctions lisses dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$).

Pour le cas $p > 1$, soit $u \in W^{1,p}$ et $\alpha > 1$ qu'on fixera plus tard. En appliquant l'inégalité pour $p = 1$ à $v = u|u|^{\alpha-1}$, on a

$$||u||^{\alpha}_{L^{\alpha d/(d-1)}} \leqslant \alpha \int |u|^{\alpha-1}|\nabla u| \leqslant \alpha ||\nabla u||_p ||u||^{\alpha-1}_{L^{(\alpha-1)p/(p-1)}} \tag{7.1}$$

où on a utilisé l'inégalité de Holder. On prend alors α tel que

$$\frac{\alpha d}{d-1} = \frac{(\alpha-1)p}{p-1} \Rightarrow \frac{\alpha d}{d-1} = p^*,$$

ce qui conclut la preuve.

□

Par interpolation on en déduit

Corollaire 7.3.3. *Soit $1 \leqslant p < d$. On a un injection continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $q \in [p, p^*]$.*

Dans le cas critique $p = d$, on a

Théorème 7.3.4. *Pour tout $q \in [d, +\infty)$ l'espace $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. On part de l'inégalité (7.1) avec $\alpha > 1$ arbitraire et $p = d$. En utilisant l'inégalité de Young, on en déduit

$$||u||_{L^{\alpha d/(d-1)}} \leqslant C(\alpha)(||\nabla u||_d + ||u||_{(\alpha-1)d/(d-1)}.$$

Si on rpend $\alpha = d$, on obtient

$$||u||_{L^{d^2/(d-1)}} \leqslant C(||\nabla u||_d + ||u||_d)$$

et donc l'injection continue dans $L^{d^2/(d-1)}$. Par interpolation, on a aussi l'injection continue dans L^q pour $q \in [d, d^2/(d-1)]$. On reprend ensuite ce raisonnement pour $\alpha = d+1, d+2\dots$ pour obtenir tous les exposants $q \in [d, +\infty)$. □

Dans le cas sur-critique, on a la continuité:

Théorème 7.3.5 (Morrey)**.** *Soit $p > d$. Alors l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. De plus, si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, elle admet un représentant continu (encore noté f), et il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C||\nabla f||_{L^p}|x-y|^{1-d/p}.$$

Proof. Supposons $f \in C_c^1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, et Q un cube dont les arrêtes sont parallèles aux axes de coordonnées, et sont de longueur $r = 2|x-y|$. Dans toute la suite, C sera une constante qui peut varier de ligne à ligne, mais qui ne dépendra jamais de f, x ou y. Pour tout $z \in Q$ on a

$$|f(x) - f(z)| \leqslant \int_0^1 |\nabla f(x + t(z-x))||z-x|dt \leqslant Cr \int_0^1 |\nabla f(x + t(z-x))|dt.$$

Posons $\bar{f} := |Q|^{-1} \int_Q f$. En intégrant l'inégalité précédente, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - \bar{f}| &\leqslant |Q|^{-1} \int_Q |f(x) - f(z)|dz \\ &\leqslant Cr^{1-d} \int_Q \int_0^1 |\nabla f(x + t(z-x))|dtdz \\ &\leqslant Cr^{1-d} \int_0 1 \int_{Q_t} |\nabla f(y)|dydt \end{aligned}$$

où $Q_t = (1-t)x + tQ \subset Q$. En appliquant l'inégalité de Hölder et en notant p' l'exposant dual de p, on a

$$\int_{Q_t} |\nabla f(y)|dy \leqslant ||\nabla f||_p |Q_t|^{1/p'} \leqslant C||\nabla f||_p t^{d/p'} r^{d/p'}.$$

On a alors

$$|f(x) - \bar{f}| \leqslant Cr^{1-d+d/p'} ||\nabla f||_p = Cr^{1-d/p} ||\nabla f||_p.$$

D'où $|f(x) - f(y)| \leqslant C||\nabla f||_p |x-y|^{1-d/p}$.

Pour la borne L^∞, on reprend le raiosnnement précédent avec un cube de longueur 1 contenant x pour obtenir

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - \bar{f}| + |\bar{f}| \leqslant C||\nabla f||_p + ||u||_p \leqslant C||u||_{W^{1,p}}.$$

□

Dans le cas d'un domaine borné, on a via le théorème de prolongement :

Théorème 7.3.6. *Soit Ω ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $\partial\Omega$ borné, et $p \in [1, +\infty]$. On a*

1. *Si $p < d$, alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [p, p^*]$ (toujours avec $p^* = (d-p)/(dp)$).*
2. *Si $p = d$, alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [d, +\infty)$.*
3. *Si $p > d$ alors $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\Omega)$.*

On a également des injections compactes dans le cas sous-critique :

Théorème 7.3.7 (Rellich-Kondrachov)**.** *Soit Ω ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d$, et $p \in [1, +\infty]$. On a*

1. *Si $p < d$, alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [p, p^*)$ (toujours avec $p^* = (d-p)/(dp)$).*

2. Si $p = d$, alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte pour tout $q \in [d, +\infty)$.

3. Si $p > d$ alors l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$ est compacte.

En revanche, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$ n'est pas compacte. De plus, si Ω est non borné, en général l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ n'est pas compacte.

Si Ω est régulier borné, on déduit du théorème de Rellich-Kondrachoc que toute suite faiblement convergente dans $W^{1,p}(\Omega)$ est fortement convergente dans $L^p(\Omega)$.

Proof. Nous allons démontrer la première partie en vérifiant les hypothèses du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. La partie 2 se prouve de manière analogue. La partie 3 est une conséquence immédiate du théorème de Morrey et du théorème d'Arzela-Ascoli.

Soit $\alpha \in (0, 1]$ tel que $\frac{1}{q} = \alpha + \frac{1-\alpha}{p^*}$. Soit $\omega \subset\subset \Omega$ et $|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)$. Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} ||\tau_h u - u||_{L^q(\omega)} &\leqslant ||\tau_h u - u||^{\alpha}_{L^1(\omega)} ||\tau_h u - u||^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\omega)} \\ &\leqslant |h|^{\alpha} ||\nabla u||^{\alpha}_{L^1(\Omega)} (2||u||_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \\ &\leqslant C|h|^{\alpha} ||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Sobolev et la Proposition 7.2.5 (plus précisément, l'implication qui reste vraie lorsque $p = 1$). Ceci nous donne la première condition dans le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Holder, on a

$$||u||_{L^q(\Omega \backslash \omega)} \leqslant ||u||_{L^{p^*}(\Omega \backslash \omega)} |\Omega \backslash \omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}},$$

ce qui donne la deuxième condition dans le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, et conclut la preuve. □

7.4 Espaces $W^{1,p}_0(\Omega)$ et traces de fonctions $W^{1,p}$

On note encore σ la mesure de surface sur le bord de l'ouvert Ω.

Lemme 7.4.1. *Soit $p \in [1, +\infty)$ et Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ on ait*

$$||f||_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |f(x)|^p d\sigma(x) \right)^{1/p} \leqslant C||f||_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Proof. On ne fera la preuve que dans le cas d'un demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$. Le cas général se fait à partir de celui là, en rectifiant $\partial\Omega$ par cartes locales.

Commençons par le cas $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ on a

$$|u(x', 0)|^p \leqslant \int_0^{\infty} |\partial_d(u^p)|(x', s) ds = p \int_0^{\infty} |u|^{p-1}(x', s) |\partial_d u(x', s)| ds.$$

Pour $p = 1$, la conclusion suit en intégrant en x'. Pour $p > 1$, l'inégalité de Young nous donne

$$|u(x', 0)|^p \leqslant C \left(\int_0^{\infty} |u(x', s)|^p ds + \int_0^{\infty} |\partial_d u(x', s)|^p ds \right)$$

et l'inégalité suit en intégrant en x'. Pour le cas général, on utilise la densité de $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ et la complétude de $L^p(\partial\Omega)$. $\square$

Comme application, on obtient l'existence d'un opérateur de trace comme prolongement continu de la restriction sur le bord :

Théorème 7.4.2. *Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe un opérateur linéaire continu $T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ tel que $Tf = f|_{\partial\Omega}$ pour tout $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 7.4.3. *Soit $p \in [1, +\infty)$ et Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $C_c^1(\Omega)$ pour la norme $W^{1,p}(\Omega)$. On note aussi $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$*

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$. C'est donc un espace de Banach, et il est réflexif si $p \in (1, +\infty)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 7.4.4. *Soit Ω un ouvert borné régulier, T l'opérateur de trace sur $\partial\Omega$, et $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ssi $Tf = 0$.*

Autrement dit, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est le noyau de l'opérateur de trace.

L'inclusion $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{Ker}(T)$ est immédiate, par continuité de l'opérateur T. On pourra consulter [6, Section 5.5] pour la preuve de l'inclusion inverse.

Proposition 7.4.5 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit $p \in [1, +\infty)$ et Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leqslant C||\nabla f||_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, la norme $W^{1,p}$ et $f \longrightarrow ||\nabla f||_p$ sont des normes équivalentes (mais elles ne le sont pas sur $W^{1,p}$ tout entier).

Proof. Soit M tel que $\Omega \subset \{|x_1| \leqslant M\}$. Soit $u \in C_c^1(\Omega)$. On a

$$u(x) = 2M \int_0^1 \partial_1 u(x - 2tMe_1)dt.$$

Ensuite

$$\int |u|^p \leqslant (2M)^p \int_\Omega \int_0^1 |\partial_1 u(x - 2tMe_1)|^p dtdx \leqslant (2M)^p \int_\Omega |\nabla u|^p,$$

et on conclut par densité de $C_c^1(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

7.5 Calcul des variations et EDP

7.5.1 EDP linéaires

On considère le problème de Dirichlet sur un domaine Ω (ouvert borné régulier) avec condition de bord homogène

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega; \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{7.2}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$.

Définition 7.5.1. *Une solution au sens faible (ou des distributions) de* (7.2) *est une fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *telle que* $\forall \varphi \in L^2$ *on a*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi.$$

Théorème 7.5.2. *L'unique solution de* (7.2) *est donnée par l'unique minimiseur de*

$$J(v) := \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + \int v f.$$

Ce théorème peut être démontrée par application du théorème de représentation de Riesz dans l'espace de Hilbert H_0^1. On détaille la preuve (qui est plus ou moins la même que celle du théorème de Riesz) pour souligner les arguments qui seront utiles dans des cadres plus généraux (notamment non-linéaires).

Proof. On prouve l'unicité du minimiseur par stricte convexité de J.

On vérifie que J est minorée car, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned} J(v) &\geqslant \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 - ||v||_2 ||f||_2 \\ &\geqslant C ||v||_2^2 - \frac{\lambda}{2} ||v||_2^2 - \frac{1}{2\lambda} ||f||_2^2 \\ &\geqslant -C' ||f||_2^2. \end{aligned}$$

Soit v_n une suite minimisante de J. On vérifie aisément que $||\nabla v||_2$ est bornée, et donc que (v_n) est bornée dans H_0^1, apr application de l'inégalité de Poincaré. On peut donc extraire une sous-suite faibelment convergente, qu'on notera encore (v_n) sans perdre de généralité. Comme $v \longrightarrow \int |\nabla v|^2$ ets faiblement s.c.i (car fortement s.c.i. et convexe) et que $v \longrightarrow \int f v$ est continue, J est s.c.i., et donc la limite faible des (v_n) est un minimiseur global de J. On notera ce minimiseur u.

Pour montrer que u vérifie l'EDP, on analyse la première variation de J :

$$J(u + \varepsilon \varphi) - J(u) = \varepsilon \left(\int \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int f \varphi \right) + O(\varepsilon^2) \geqslant 0.$$

En faisant tendre ε vers 0, et en obtenant l'inégalité inverse en remplaçant φ par $-\varphi$, on obtient bien

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Réciproquement, si u vérifie l'EDP, c'est un point critique de J. Mais comme J est strictement convexe, elle admet un unique point critique, qui est son minimum global. □

Pour trouver une solution de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega; \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega \tag{7.3}$$

avec $g \in H^1(\Omega)$, on cherche à la place un minimiseur de J sur l'espace affine $g + H_0^1(\Omega)$.

Théorème 7.5.3 (Lax-Milgram). *Soit F un espace de Hilbert, et a une forme bilinéaire continue coercive. Pour tout $f \in F$, il existe un unique $u \in F$ tel que*

$$a(u,x) = \langle f, x\rangle \quad \forall x \in F.$$

Ce théorème généralise celui de Riesz en autorisant l'utilisation de formes bilinéaires non-symmétriques.

Comme application, on peut étudier les solutions faibles de l'EDP

$$-\sum_{i,j} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) = f \text{ dans } \Omega; \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{7.4}$$

lorsque les $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ vérifient la condition d'ellipticité

$$\sum a_{i,j}(x) y_i y_j \geqslant \lambda |y|^2 \ \ \forall y \in \mathbb{R}^d$$

pour un certain $\lambda > 0$, et pour presque tout $x \in \Omega$, en considérant l'unique minimiseur de

$$v \longrightarrow \frac{1}{2}\int \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_i v \partial_j v + \int fv.$$

La condition d'ellipticité (avec l'inégalité de Poincaré) permet de vérifier que la forme bilinéaire utilisée est coercive.

7.5.2 Exemples d'EDP non-linéaires

On considère la fonction

$$J(f) = \int_\Omega F(\nabla f) + G(f)$$

avec Ω un ouvert régulier borné. On suppose dans toute la suite que F et G sont continues, et que G est minorée.

Lemme 7.5.4. *Supposons que il existe $A > 0$ et $B \in \mathbb{R}$, ainsi que $p > 1$, tels que*

$$F(z) \geqslant A|z|^p + B \ \ \forall z \in \mathbb{R}^d$$

et que F est convexe. Alors J admet au moins un minimiseur sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si de plus J est strictement convexe, alors le minimiseur est unique.

Proof. Les minorations de F et G garantissent que J est minorée. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante. L'hypothèse de croissance sur F et la minoration de J impliquent que $||\nabla f_n||_p$ est bornée. L'inégalité de Poincaré implique alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}$, et donc qu'on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente, qu'on notera encore $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans perdre de généralité. Notons f la limite. De plus, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ étant compacte, on peut supposer que f_n converge fortement dans L^p vers f (et aussi p.p.).

Le lemme de Fatou donne

$$\liminf \int G(f_n) \geqslant \int G(f)$$

et on sait que $v \longrightarrow \int F(\nabla v)$ est s.c.i. pour la topologie forte de $W^{1,p}$, donc faiblement s.c.i. car elle est aussi convexe. On en déduit alors que $J(f) \leqslant \inf J$, et donc que f est un minimiseur de J. □

A noter que sans l'hypothèse de convexité, il peut ne pas y avoir de minimiseur. La fonctionnelle

$$J(u) = \int_0^1 (1-(u')^2)^2 + u^2; \quad u \in W_0^{1,4}(]0,1[)$$

vérifie $\inf J = 0$, mais n'admet pas de minimiseur.

Théorème 7.5.5. *En plus des hypothèses du Lemme 7.5.4, supposons que F et G soient C^1, et qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$|\nabla F(z)| \leqslant C(|z|^{p-1}+1)$$

et que il existe $q > 1$ tel que $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ (en utilisant les inégalités de Sobolev) et que

$$|G'(u)| \leqslant C(|u|^{q-1}+1).$$

Alors tout minimiseur u de J dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est solution faible de l'EDP

$$-\operatorname{div}(\nabla F(\nabla u)) + G'(u) = 0; \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

c'est à dire que

$$\int \nabla F(\nabla u)\cdot\nabla\varphi + \int G'(u)\varphi = 0 \ \ \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proof. Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varepsilon \in (0,1)$. On a par définition de u

$$\frac{1}{\varepsilon}(J(u+\varepsilon\varphi) - J(u)) \geqslant 0.$$

Posons

$$\eta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}(F(\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi) - F(\nabla u)).$$

Comme F est C^1,

$$\eta_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \nabla F(\nabla u)\cdot\nabla\varphi \text{ p.p.}$$

De plus, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et les hypothèses de croissance sur F, on a

$$|\eta_\varepsilon| \leqslant |\nabla\varphi| \sup_{[\nabla u, \nabla u+\varepsilon\nabla\varphi]} |\nabla F| \leqslant C|\nabla\varphi|(1+(|\nabla u|+|\nabla\varphi|)^{p-1}) \in L^1.$$

On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\int_\Omega \eta_\varepsilon \longrightarrow \int_\Omega \nabla F(\nabla u)\cdot\nabla\varphi.$$

De même, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int G(u+\varepsilon\varphi) - G(\nabla u) \longrightarrow \int G'(u)\varphi.$$

On a donc

$$\int_\Omega \nabla F(\nabla u)\cdot\nabla\varphi + \int G'(u)\varphi \geqslant 0 \ \ \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En remplaçant φ par $-\varphi$, on voit qu'il y a égalité, ce qui conclut la preuve. □

On considère maintenant

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda u^2$$

qu'on cherche à minimiser non pas sur l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, mais sur son intersection avec la boule L^p:

$$B_p := \{u \in H^1; \int_\Omega u^p = 1$$

avec $2 < p < p^*$ (pour que l'injection de Sobolev soit compacte). A TERMINER

Le troisième exemple fait en cours (en 2024 seulement) était le problème de Thomas-Fermi, on pourra consulter [11, Chapitre 11]

Le phénomène de concentration-compacité vu pour les mesures au Chapitre 4 a un analogue dans les espaces de Sobolev. On pourra consulter [10] pour une introduction pédagogique à ce sujet.

Chapter 8

Analyse spectrale

Dans tout ce chapitre, E et F seront des espaces de Banach (et souvent des espaces de Hilbert).

8.1 Adjoint d'un opérateur

Définition 8.1.1. *Un opérateur est une application linéaire T définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$, à valeurs dans F. L'espace $D(T)$ est le domaine de l'opérateur T.*

On dit que T est un opérateur borné si $D(T) = E$ et si T est continu.

On dit que T_2 est une extension de T_1 si $D(T_1) \subset D(T_2)$ et si $T_2|_{D(T_1)} = T_1$.

Exemple 8.1.1. *$T(f) = f'$ est borné sur H^1, mais pas sur L^2.*

On dit que T est à domaine dense si $\overline{D(T)} = E$.

On note $\mathrm{Im}(T)$ l'image de T, $\mathrm{Ker}(T)$ son noyau, et $\mathrm{Gr}(T) = \{(x, T(x)), x \in D(T)\}$ son graphe. L'opérateur T est fermé si son graphe est fermé.

Définition 8.1.2. *Soit T un opérateur à domaine dense. On définit*

$$D(T^*) := \{f \in F^* \text{ t.q. } x \in D(T) \longrightarrow f(T(x)) \text{ est continu}\}$$

et T^* l'opérateur linéaire continu, appelé adjoint,

$$T^* : \begin{cases} D(T^*) & \longrightarrow E^* \\ f \longrightarrow (x \longrightarrow f(T(x)). \end{cases}$$

A noter qu'on n'a pas supposé que T est borné dans cette définition.

Exemple 8.1.2. *Si E est un espace de Hilbert et T un endomorphisme de E, alors T^* est l'opérateur tel que $\forall x, y \in E$ on a*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Exemple 8.1.3. *Si $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et $T(f) = f' + f$ sur $H^1(\mathbb{R})$. Alors comme $\forall f, g \in H^1(\mathbb{R})$ on a*

$$\int (f' + f)g + \int f(-g' + g)$$

on a

$$T^*(g) = -g' + g; \quad D(T^*) = H^1(\mathbb{R}).$$

Définition 8.1.3. *Si A est un sous-espace vectoriel de E, son orthogonal est*

$$A^{\perp} := \{f \in E^*; \quad f(x) = 0 \forall x \in A\}.$$

Si B est un sous-espace vectoriel de E^*, son adjoint est

$$B^{\perp} := \{x \in E; \quad f(x) = 0 \forall f \in B\}.$$

Il n'y a pas d'ambiguité lorsque E est réflexif.

Exercice 8.1.1. *Soient M un sous-espace vectoriel de E, et N un sous-espace vectoriel de E^*.*

1. *Montrer que $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$ et $\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}$.*
2. *Montrer que si E est réflexif alors $(N^{\perp})^{\perp} = \overline{N}$.*
3. *Montrer que en général $(N^{\perp})^{\perp}$ est l'adhérence de N pour la topologie faible-*.*

Solution 8.1.1.

Proposition 8.1.4. *Soit $T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire à domaine dense (pas forcément continu). Alors T^* est fermé.*

Proof. Soient $(f_n) \in D(T^*)^{\mathbb{N}}$ tq $f_n \longrightarrow f$ dans F^* et $T^*(f_n) \longrightarrow g$ dans E^*. Alors $\forall x \in D(T)$ on a

$$f(T(x)) - g(x) = \lim_n f_n(T(x)) - T^*(f_n(x)) = 0.$$

De plus, $\forall x \in D(T)$ on a $|f(T(x))| \leqslant ||g||_{E^*}||x||$. Donc $f \in D(T^*)$ et $T^*(f) = g$. □

Remarque 8.1.1. *Si T est un opérateur borné, alors $D(T^*) = F^*$ et T^* est borné, avec $||T^*||_{op} = ||T||_{op}$.*

Proposition 8.1.5. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur borné et fermé. Alors*

$$\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp}; \quad \mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^{\perp};$$

$$\overline{\mathrm{Im}(T^*)} \subset \mathrm{Ker}(T)^{\perp}; \quad \overline{\mathrm{Im}(T)} = (\mathrm{Ker}(T^*))^{\perp}.$$

De plus

$$\mathrm{Im}(T) \text{ fermé } \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T^*) \text{ fermé}$$

$$\mathrm{Im}(T) = (\mathrm{Ker}(T^*))^{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}.$$

Proof. Exercice. □

8.2 Opérateurs compacts

Définition 8.2.1. *Un opérateur T borné est de rang fini si* $\mathrm{Im}(T)$ *est de dimension finie.*

Un opérateur borné $T : E \longrightarrow F$ est dit compact si $T(B_E(0, 1))$ est relativement compact dans F (pour la topologie forte).

On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E vers F.

Proposition 8.2.2. *L'adhérence (pour la norme opérateur) de l'ensemble des opérateurs de rang fini est inclus $\mathcal{K}(E, F)$ (qui est fermé). Si F est un espace de Hilbert, il y a égalité.*

Proof. Commençons par montrer que $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé. Soit (T_n) une suite d'opérateurs comapcts convergeant vers un opérateur T. Comme F est complet, il nous suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{T(B_E(0,1))}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayons ε. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $||T_n - T||_{op} < \varepsilon/2$. Comme $T_n(B_E)$ est relativement compact, il existe une famille finie $y_1, \dots, y_k$ tels que

$$\overline{T_n(B_E(0,1))} \subset \cup_{1 \leqslant i \leqslant k} B_F(y_i, \varepsilon/2).$$

Alors par l'inégalité triangulaire

$$\overline{T(B_E(0,1))} \subset \cup_{1 \leqslant i \leqslant k} B_F(y_i, \varepsilon).$$

De plus, comme les opérateurs de rang fini sont trivialement compacts, on en déduit immédiatement que l'adhérence de l'ensemble de sopérateurs de rang fini est inclus dans $\mathcal{K}(E, F)$. Supposons maintenant que F ets une espace de Hilbert, et montrons l'inclusion réciproque. Soit T un opérateur compact et $\varepsilon > 0$. Il existe $y_1, \dots, y_k$ tels que

$$\overline{T(B_E(0,1))} \subset \cup_{1 \leqslant i \leqslant k} B_F(y_i, \varepsilon).$$

Soit G l'espace vectoriel engendré par les y_i (donc de dimension finie), et p_G le projecteur orthogonal sur G. Alors $p_G \circ T$ est un opérateur de rang fini, et comme pour tout $x \in B_E$ il existe y_i tel que $||T(x) - y_i|| < \varepsilon$ on en déduit que

$$||p_G(T(x)) - T(x)|| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in \overline{B_E(0,1)}.$$

□

Théorème 8.2.3 (Théorème de Schauder)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est compact si et seulement si $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ l'est aussi.*

Proof. Supposons T compact, et montrons que T^* est compact. On va montrer que si (f_n) est une suite de B_{F^*} alors on peut extraire une sous-suite telle que $T^*(f_{\varphi(n)}$ converge dans E^*. Posons $K := \overline{T(B_E)}$ et $g_n := f_n|_K$ (la restriction de f_n au compact K). La famille (g_n) ets uniformément équicontinue sur le compact K, donc on peut en extraire une sous-suite $g_{\varphi(n)}$ qui converge uniformément sur K. En particulier,

$$\sup_{x \in B_E} T^*(f_{\varphi(n)})(x) - T^*(f_{\varphi(\ell)})(x) = \sup_{x \in B_E} f_{\varphi(n)}(T(x)) - f_{\varphi(\ell)}(T(x)) \underset{n,\ell \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $(T^*(f_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E^* (pour la norme opérateur), et donc elle converge.

Réciproquement, supposons T^* compact. Alors d'après ce qui précède T^{**} est compact (comme opérateur de E^{**} dans F^{**}). Si E et F sont réflexifs, cela conclut la preuve. Dans le cas général, cela justifie que $T^{**}(B_E)$ est d'adhérence compact dans F^{**}. On montre ensuite que $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ (car $T^{**}|_E = T$). Comme F est fermé dans F^{**}, cela justifie que $T(B_E)$ est d'adhérence compacte dans F. □

Exemple 8.2.1. *Soit Ω un ouvert régulier borné, $f \in L^2(\Omega)$ et u_f l'unique solution dans H_0^1 de $\Delta u = f$. Alors l'opérateur*

$$T : \begin{cases} L^2(\Omega) & \longrightarrow L^2(\Omega) \\ f & \longrightarrow u_f \end{cases}$$

est un opérateur compact. En effet, comme u_f est un minimiseur de

$$u \longrightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu$$

on a $J(u_f) \leqslant J(0) = 0$. D'où

$$||\nabla u_f||_2^2 \leqslant ||f||_2||u_f||_2 \Rightarrow ||u||_{H^1} \leqslant C||f||_2$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré. T est donc continu de L^2 vers H_0^1, donc compact de L^2 vers L^2 via la théorème de Rellich-Kondrachov (qui garantit l'injection compacte de H_0^1 dans L^2).

Théorème 8.2.4. *Soit $E = L^2(\mathcal{X}, \mu)$, espace de Hilbert séparable. Soit $k \in L^2(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mu \otimes \mu)$. Alors l'opérateur*

$$K : f \in E \longrightarrow \left(y \longrightarrow \int f(x)k(x,y)d\mu\right)$$

et un opérateur compact de E vers E.

On appel ce type d'opérateur intégral un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Proof. Exercice fait en TD □

Exemple 8.2.2. *Ce théorème s'applique à $k(x,y) = \exp(-|x|^2 - |y|^2)$ le noyaux Gaussien sur $L^2(dx)$, ainsi que si k ets une focniton continue à support compact de $\mathbb{R}^d$ (toujours dans $L^2(dx)$).*

Proposition 8.2.5. *Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, telle que*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{|x|\geqslant R} |f_n|^2 dx = \limsup_{R\to\infty} \sup_n \int_{|x|\geqslant R} |\hat{f}_n|^2 dx = 0.$$

Alors on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Réciproquement, toute suite convergente dans $L^2(\mathbb{R})$ vérifie les hypothèses de cette proposition.

Proof. Pour tout $A > 0$, on pose

$$T_A : f \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{|y|\leqslant A}\mathcal{F}(f\mathbb{1}_{|x|\leqslant A})).$$

Plus explicitement,

$$\begin{aligned} T_A(f)(z) &= (2\pi)^{-d/2}\int_y e^{-iy\cdot z}\mathbb{1}_{|y|\leqslant A}\int_x e^{ix\cdot y}\mathbb{1}_{|x|\leqslant A}f(x)dxdy \\ &= (2\pi)^{-d/2}\int_{B(0,A)\times B(0,A)} e^{i(x\cdot y - y\cdot z}f(x)dxdy. \end{aligned}$$

On reconnait un opérateur de Hilbert-Schmidt, qui est donc compact. En particulier, $T_A(f_n)$ est compacte dans L^2. Soit $A > 0$ tel que

$$\sup_n \int_{|x|\geqslant A} |f_n|^2 dx \leqslant \varepsilon \text{ et } \sup_n \int_{|x|\geqslant A} |\hat{f}_n|^2 dx \leqslant \varepsilon.$$

En utilisant la formule de Plancherel

$$\begin{aligned}
||T_A f_n - f_n||_2 &= (2\pi)^{-d/2} ||\widehat{T_A f_n} - \hat{f}_n||_2 \\
&= (2\pi)^{-d/2} ||\mathbb{1}_{|y|\leqslant A} \mathcal{F}(f_n \mathbb{1}_{|x|\leqslant A}) - \hat{f}_n||_2 \\
&\leqslant (2\pi)^{-d/2} ||\mathbb{1}_{|y|\leqslant A} (\mathcal{F}(f_n \mathbb{1}_{|x|\leqslant A}) - \hat{f}_n)||_2 + (2\pi)^{-d/2} ||\mathbb{1}_{|y|>A} \hat{f}_n)||_2 \\
&\leqslant (2\pi)^{-d/2} ||\mathcal{F}(f_n \mathbb{1}_{|x|\leqslant A}) - \hat{f}_n||_2 + (2\pi)^{-d/2} \sqrt{\varepsilon} \\
&= ||f_n \mathbb{1}_{|x|\leqslant A} - f_n||_2 + (2\pi)^{-d/2} \sqrt{\varepsilon} \\
&\leqslant (1 + (2\pi)^{-d/2}) \sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une suite A_n qui croit vers l'infini telle que

$$\sup_k ||T_{A_n} f_k - f_k||_2 \leqslant \frac{1}{4n}.$$

Par compacité de T_{A_n}, on peut obtenir une extraction φ telle que pour tout n on ait

$$\forall k, \ell \geqslant n \ \ ||T_{A_n} f_{\varphi(k)} - T_{A_n} f_{\varphi(\ell)}||_2 \leqslant \frac{1}{4n}.$$

On voit alors que $(f_{\varphi(n)})_n$ est une suite de Cauchy dans L^2, et donc converge. □

8.3 Alternative de Fredholm

Théorème 8.3.1 (Alternative de Fredholm)**.** *Soit E un espace de Banach t T : $E \longrightarrow E$ un opérateur compact. Alors*

1. $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ *est de dimension finie;*
2. $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ *est fermée et* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$*;*
3. $\mathrm{Id} - T$ *est injectif si et seulement si il est surjectif;*
4. $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T^*))$.

Autrement dit, l'équation $x - T(x) = f$ vérifie :

- Soit $\forall f \in E$ il existe une unique solution;
- Soit l'équation $x - T(x) = 0$ a n solutions linéairement indépendantes, et alors l'équation $x - T(x) = f$ admet une solution si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité.

A noter que rechercher des valeurs propres non-nulles de T revient à chercher des $\lambda \neq 0$ tels que $\mathrm{Id} - \lambda^{-1} T$ soit non-injectif. Comme T compact $\Rightarrow \lambda^{-1} T$ compact, on voit déjà que l'alternative de Fredholm sera utile pour étudier le spectre des opérateurs compacts.

Proof. 1. Soit $K_0 := \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ et $\overline{B}_{K_0}$ sa boule fermée. On a $\overline{B}_{K_0} = T(\overline{B}_{K_0}) \subset T(\overline{B}_E)$ donc B_{K_0} est comapcte. Or la boule unité d'un espace de Banach est fortement compacte ssi l'espace est de dimension finie, donc K_0 est de dimension finie.

2. En utilisant la Proposition 8.1.5, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ est fermée. Soit (y_n) une suite de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ convergeant vers $y \in E$, et (x_n) une suite telle que $y_n = x_n - T(x_n)$ $\forall n$. Montrons que $y \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$. Soit

$$d_n := \mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)).$$

Nous allons montrer par l'absurde que d_n est bornée. Supposons que ce n'ets pas le cas. Quitte à extraire, on peut supposer $d_n \longrightarrow +\infty$. Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie,

$$\forall n \ \exists x'_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T) \text{ t.q. } d_n = ||x_n - x'_n||_E.$$

Soit

$$z_n := \frac{x_n - x'_n}{d_n}.$$

On a

$$\mathrm{dist}(z_n, \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)) = \frac{1}{d_n} \mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)) = 1;$$

$$z_n - T(z_n) = \frac{y_n}{d_n} \longrightarrow 0.$$

Comme T est compacte, quitte à extraire on peut supposer $T(z_n) \longrightarrow v \in E$. Or $z_n - T(z_n) \longrightarrow 0$ donc $z_n \longrightarrow v$. Mais alors $T(v) = v$, d'où $v \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)$. C'ets absurde car par continuité de la distance on a $\mathrm{dist}(z, \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - T)) = 1$. Donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Comme T est compact, quitte à extraire on peut supposer que il existe x tel que $T(x_n - x'_n) \longrightarrow x$. D'où

$$x_n - x'_n = y_n + T(x_n) - T(x'_n) \longrightarrow y + x.$$

Donc $x = T(y+x)$ d'où $y = (y+x) - T(y+x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$. Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ est fermée.

3. Supposons tout d'abord par l'absurde que $\mathrm{Id} - T$ est injectif, mais pas surjectif. Soit $E_n := (\mathrm{Id} - T)^n(E)$ (l'image de $(\mathrm{Id} - T)^n$. C'ets une suite emboîtée de sous-espaces vectoriels de E, strictement décroissante pour l'inclusion car $\mathrm{Id} - T$ est injectif et non-surjectif. De plus, $T|_{E_n}$ est un opérateur compact, donc $E_n = \mathrm{Im}((\mathrm{Id} - T)|_{E_{n-1}})$ est fermé. On peut alors construire par récurrence $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \ \ x_n \in E_n; \ \ ||x_n||_E = 1 \text{ et } \mathrm{dist}(x_n, E_{n+1}) \geqslant 1/2.$$

Soient $n > \ell$. On a

$$T(x_n - x_\ell) = ((x_\ell - T(x_\ell)) - (x_n - T(x_n)) + x_n)) - x_\ell.$$

Comme $(x_\ell - T(x_\ell)) - (x_n - T(x_n)) + x_n) \in E_{\ell+1}$ et $\mathrm{dist}(x_\ell, E_{\ell+1}) \geqslant 1/2$, on voit que $(T(x_k))_k$ n'admet aucune sous-suite qui soit de Cauchy, et donc aucune sous-suite convergente. Cela ocntredit la compacité de T. Donc $\mathrm{Id}-T$ est surjectif.

La réciproque (la surjectivité de $\mathrm{Id}-T$ implique l'injectivité) se fait en appliquant le raisonnement ci-dessus à T^*, et en utilisant que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T^*)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(Id-T^*) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)^{\perp}$.

4. Soit $d = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ et $d^* = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T^*)$. On peut supposer que $\dim E = \infty$. Notre but est de montrer que $d = d^*$.

   Supposons que $d < d^*$. Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ est de dimension finie, il admet un supplémentaire topologique, et on peut considérer p la projection continue sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ associée. De même, comme $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T^*)^{\perp}$ est de codimension d^*, il admet un supplémentaire topologie dans E, qu'on notera $\tilde{E}$, et qui est de dimension d^*.

   Comme $d < d^*$, il existe $\ell : \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T) \longrightarrow \tilde{E}$ linéaire injective, et non-surjective. Soit $B = T + \ell \circ p$, qui est un opérateur compact car $\ell \circ p$ est de rang fini. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-B)$. On a

$$0 = x - B(x) = x - T(x) - \ell(p(x)).$$

   Or $x - T(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)$ et $\ell(p(x)) \in \tilde{E}$, supplémentaire topologique de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)$. Donc $x - T(x) = \ell(p(x)) = 0$. D'où $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T)$ et $p(x) = 0$ car ℓ. Mais comme p est un projecteur sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T)$, on en déduit que $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-B) = \{0\}$, et donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-B) = E$ (car $\mathrm{Id}-B$ est injectif ssi il est surjectif). Mais ceci est absurde, car $\exists y \in \tilde{E} \setminus \mathrm{Im}(\ell)$, pour lequel l'équation $x - B(x) = y$ n'a pas de solution. Donc $d \geqslant d^*$.

   Avec le même raisonnement sur T^*, on obtient

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T^{**}) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T^*) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T).$$

   Or $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T^{**})$, donc il y a égalité. D'où $d = d^*$.

□

8.4 Spectre d'un opérateur

Définition 8.4.1. *Soit E un espace de Banahc sur $\mathbb{C}$, et T un endomorphisme continu de E. Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le compémentaire de*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq. } T - \lambda \mathrm{Id} \text{ est bijectif de } E \text{ vers } E\}.$$

Un complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T si $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$. L'ensemble des valeurs propres, appelé spectre ponctuel, est noté $\sigma_p(T)$.

On a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, mais en général l'inclusion est stricte. Par exemple,

$$T : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longrightarrow (0, u_0, u_1, \ldots) \end{cases}$$

est injectif mais pas surjectif. Donc $0 \in \sigma(T)$, mais $0 \notin \sigma_p(T)$.

Proposition 8.4.2. *Soit E un espace de Banach et T un endomorphisme continu de E. $\sigma(T)$ est compact et $\sigma(T) \subset \overline{B_{\mathbb{C}}(0, ||T||)}$ (la boule fermée du plan complexe, de rayon $||T||$).*

Proof. Commençons par montrer l'inclusion. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda > ||T||$, et $f \in E$. Comme $x \longrightarrow \lambda^{-1}(T(x) - f)$ est L-lipschitz avec $L < 1$, apr théorème du point fixe de Picard l'équation $\lambda x = T(x) - f$ a une unique solution. Donc $T - \lambda \operatorname{Id}$ est bijectif. On en déduit que $\sigma(T) \subset \overline{B_{\mathbb{C}}(0, ||T||)}$.

Il nous reste à montrer que $\sigma(T)$ est fermé (et donc compact car borné), ce qui revient à montrer que $\rho(T)$ est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. L'application $x \longrightarrow (T - \lambda_0 \operatorname{Id})(x)$ est linéaire bijective et continue sur l'espace de Banach E, donc son inverse est continue. Par théorème de point fixe de Picard, l'équation

$$T(x) - \lambda x = f \leftrightarrow x = (T - \lambda_0 \operatorname{Id})^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x)$$

a une unique solution dès que $|\lambda - \lambda_0| ||(T - \lambda_0 \operatorname{Id})^{-1}|| < 1$. Donc si $|\lambda - \lambda_0|$ est assez petit, $\lambda \in \rho(T)$, et donc $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

□

On va maintenant utiliser l'alternative de Fredholm pour étudier le spectre des opérateurs compacts.

Théorème 8.4.3. *Soit E un espace de Banach* de dimension infinie *et T un endomorphisme compact de E. Alors*

1. $0 \in \sigma(T)$;
2. $\sigma(T) \backslash \{0\} = \sigma_p(T) \backslash \{0\}$;
3. *Soit $\sigma(T)$ est fini, soit $\sigma(T) \backslash \{0\}$ est une suite qui tend vers* 0.

En revanche, on peut avoir $0 \notin \sigma_p(T)$. C'est le cas pour $T = (\Delta)^{-1}$ comme endomorphisme de L^2 (à valeurs dans H_0^1, donc non-surjectif).

Proof.

Si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est bijectif, et $\operatorname{Id} = T \circ T^{-1}$ est compact, ce qui est absurde en dimension infinie.

Soit $\lambda \in \sigma(T) \backslash \{0\}$. Supposons par l'absurde que $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\}$. Alors par l'alternative de Fredholm $T - \lambda \operatorname{Id}$ étant surjectif, il est aussi bijectif, et c'est absurde. On a donc bien $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Il nous faut montrer que si (λ_n) est une suite d'éléments distincts de $\sigma(T) \backslash \{0\}$, alors $\lambda_n \longrightarrow 0$. Pour tout n, on a $\operatorname{Ker}(T - \lambda_n \operatorname{Id}) \neq \{0\}$, donc il existe $e_n \neq 0$ tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Soit $E_n = \operatorname{Vect}((e_k)_{k \leqslant n})$. Montrons par récurrence que les e_n forment une famille libre. Supposions que cette propriété est vraie au rang n, et que

$$e_{n+1} = \sum_1^n \alpha_k e_k.$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= (T - \lambda_{n+1}) e_{n+1} \\ &= \sum_1^n \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) e_k. \end{aligned}$$

Or on a $\lambda_k \neq \lambda_{n+1}$ pour tout $k \leqslant n$, et les $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont libres. Donc $\alpha_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

En particulier, E_n est une suite strictement croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de E. D'après le lemme 8.4.4 ci-dessous et une récurrence immédiate, il existe une suite (x_n) telle que

$$\forall n \quad ||x_n|| = 1 \text{ et } \operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2.$$

A noter que $(T(x_n))$ est relativement compacte. Or si $n > k$

$$||\lambda_n^{-1}T(x_n) - \lambda_k^{-1}T(x_k)|| = ||\lambda_n^{-1}(T(x_n) - \lambda_n x_n) - \lambda_k^{-1}(T(x_k) - \lambda_k x_k + x_n - x_k||$$

$$\geqslant \operatorname{dist}(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1.$$

Donc on ne peut pas extraire de sous-suite telle que $\lambda_n^{-1}T(x_n)$ converge, et donc aucune sous-suite de λ_n ne peut converger vers 0 (sinon cela contredirait la compacité relative de $(T(x_n))$).

On voit donc que les éléments de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ sont isolés, et que les $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda \geqslant 1/n\}$ sont des ensembles finis. Donc si $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est infini, c'est une suite qui tend vers 0. □

Dans la preuve, on a utilisé le résultat suivant :

Lemme 8.4.4. *Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict d'un espace de Banach E. Il existe $x \in E$ tel que*

$$||x|| = 1 \text{ et } \operatorname{dist}(x, M) \geqslant 1/2.$$

On peut remplacer $1/2$ par $1 - \varepsilon$.

Proof. Comme M est un sous-espace strict, il existe $y \in E$ tel que $d(y, M) > 0$. Il existe donc $y' \in M$ tel que

$$d(y, M) \leqslant ||y - y'|| \leqslant 2d(y, M).$$

On pose $x = (y - y')/||y - y'||$. Pour tout $z \in M$, on a

$$\begin{aligned} x - z &= \frac{y - y'}{||y - y'||} - z \\ &= \frac{y - y' - ||y - y'||z}{||y - y'||} \end{aligned}$$

Comme $y' + z||y - y'|| \in M$, on voit que

$$||x - z|| \geqslant \frac{\operatorname{dist}(y, M)}{||y - y'||} \geqslant \frac{1}{2}.$$

□

Définition 8.4.5. *Soit H un espace de Hilbert, et T un endomorphisme borné de H. On dit que T est auto-adjoint si $T^* = T$, c'est à dire si*

$$\forall x, y \in H; \quad \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle.$$

Proposition 8.4.6. *Soit H un espace de Hilbert, et T un endomorphisme auto-adjoint de H. Posons*

$$m := \inf_{||x||\leqslant 1} \langle T(x), x\rangle; \quad M := \sup_{||x||\leqslant 1} \langle T(x), x\rangle.$$

Alors $\{m, M\} \subset \sigma(T) \subset [m, M]$.

Proof. Nous allons montrer que

$$M \in \sigma(T) \subset (-\infty, M]$$

et le résultat suivra en remplaçant ensuite T par $-T$. Soit $\lambda > M$, et montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On a

$$\langle T(x), x\rangle \leqslant M||x||^2$$

et donc

$$\langle \lambda x - T(x), x\rangle \geqslant (\lambda - M)||x||^2.$$

La forme bilinéaire $a(x, y) = \langle \lambda x - T(x), y\rangle$ est donc continue et coercive. Par le théorème de Lax-Milgram, pour tout $z \in H$ il existe une unique solution à

$$\langle \lambda x - T(x), y\rangle = \langle z, y\rangle \forall y \in H$$

et donc $\lambda \operatorname{Id} - T$ est bijectif. Donc $\lambda \in \rho(T)$.

Montrons maintenant que $M \in \sigma(T)$. $a(x, y) = \langle Mx - T(x), y\rangle$ est une forme bilinéaire continue symétrique positive. Par inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$a(x, y)^2 \leqslant a(x, x)a(y, y).$$

En prenant $y = Mx - T(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} ||Mx - T(x)||^4 &\leqslant \langle Mx - T(x), x\rangle \times \langle (M \operatorname{Id} - T)^2 x, (M \operatorname{Id} - T)x\rangle \\ &\leqslant C\langle Mx - T(x), x\rangle \times ||Mx - T(x)||^2. \end{aligned}$$

Donc si (x_n) est une suite telle que $||x_n|| = 1$ et $\langle T(x_n), x_n\rangle \to M$, on a $||Mx_n - T(x_n)|| \to 0$. Or si on avait $M \in \rho(T)$, on aurait

$$x_n = (M \operatorname{Id} - T)^{-1}(Mx_n - T(x_n)) \longrightarrow 0$$

ce qui contredirait $||x_n|| = 1 \forall n$. Donc on a bien $M \in \sigma(T)$. □

Corollaire 8.4.7. *Soit H un espace de Hilbert réel, et T auto-adjoint. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $T = 0$.*

Proof. D'après la proposition pr'ecédente, on a

$$\langle T(x), x\rangle = 0 \quad \forall x \in H.$$

Donc

$$2\langle T(x), y\rangle = \langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x), x\rangle - \langle T(y), y\rangle = 0.$$

Donc $T = 0$. □

Théorème 8.4.8. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable, et T un opérateur compact auto-adjoint. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Proof. On suppose sans perdre de généralité que T est non-nul. Soit $\lambda_0 = 0$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des valeurs propres non-nulles distinctes de T. Soit $E_n = \mathrm{Ker}(T - \lambda_n \mathrm{Id})$, qui est de dimension finie si $n \neq 0$. On pose $F = \overline{\mathrm{Vect}(\cup_n E_n)}$. On veut montrer que $F^\perp = \{0\}$, et que les E_n sont deux à deux orthogonaux. La conclusion suivra alors en utilisant les bases hilbertiennes des E_n (qui sont de dimension finie, sauf E_0 qui a une base Hilbertienne par séparabilité).

Montrons que si $n \neq k$ alors E_n et E_k sont orthogonaux. En effet, si $x \in E_n$ et $y \in E_k$ alors

$$\lambda_n\langle x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \lambda_k\langle x, y\rangle$$

et comme $\lambda_n \neq \lambda_k$ on a bien $\langle x, y\rangle = 0$.

On a de plus $T(F) \subset F$, et $T(F^\perp) \subset F^\perp$ avec le même raisonnement. Soit $T_0 = T|_{F^\perp}$. C'est un endomorphisme de $F^\perp$ autoadjoint, et $\sigma(T_0) = \{0\}$ (car si il a une valeur propre non-nulle, ca donnerait un vecteur propre dans $F^\perp$, qui serait alors dans F par définition). Mais alors $T_0 = 0$ par le Corollaire 8.4.7. Donc

$$F^\perp \subset \mathrm{Ker}(T) \subset F$$

et alors $F^\perp = \{0\}$. □

Proposition 8.4.9. *Soit Ω un ouvert régulier borné. Il existe une suite λ_n de réels strictement positifs avec $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ et une base Hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ telle que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \forall n.$$

On rappelle que la notion de solution de l'EDP est que $\int \nabla u \cdot \nabla v = \int fv$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Proof. On a vu que l'opérateur T qui à $f \in L^2$ associe l'unique solution de $-\Delta u = f$ dans $H_0^1(\Omega)$ est compact (de L^2 vers L^2). C'est aussi un opérateur auto-adjoint dans L^2 : si $T(f) = u$ et $T(g) = v$ on a

$$\int T(f)g = \int \nabla T(f) \cdot \nabla v = \int fv = \int fT(g).$$

On considère alors une base Hilbertienne de vecteurs propres, associées aux valeurs propres $\mu_n \to 0$ (qui sont toutes non-nuls car $T(f) = 0 \to f = 0$), et on pose $\lambda_n = \mu_n^{-1}$. □

Bibliography

[1] K.I. Babenko. An inequality in the theory of Fourier integrals. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 25 (1961) pp. 531–542 English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 44, pp. 115–128

[2] W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis. *Annals of Mathematics*, Vol. 102, No. 6 (1975) pp. 159–182.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle.

[4] J. Bourgain, The metrical interpretation of super-reflexivity in Banach spaces. *Israel J. Math.* 56, 221–230 (1986).

[5] P. Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. *Israel Journal of Mathematics.* 13: 281–288 (1972).

[6] L. C. Evans, Partial Differential Equations. *Graduate Studies in Mathematics* Vol. 19

[7] A. Figalli and F. Glaudo, An invitation to optimal transport

[8] B. Kloeckner, Yet another proof of Bourgain's distortion estimate for embedding of trees into uniformly convex Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics* 200, 419–422 (2014).

[9] P. Lax, Functional Analysis.

[10] M. Lewin. Describing lack of compactness in Sobolev spaces. Lectures on Variational Methods in Quantum Mechanics, Université de Cergy-Pontoise, France. 2010.

[11] E. Lieb and M. Loss, Analysis.

[12] G. Pisier, Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel Journal of Mathematics.* 20: 326–350 (1975).

[13] C. Villani, Intégration et Analyse de Fourier. 2006.

[14] C. Villani, Topics in optimal transportation.